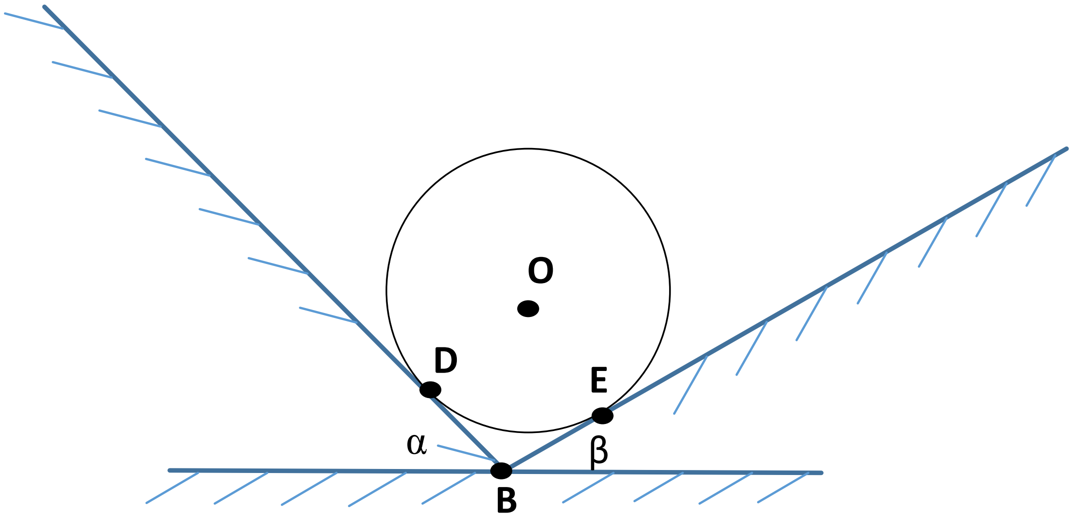
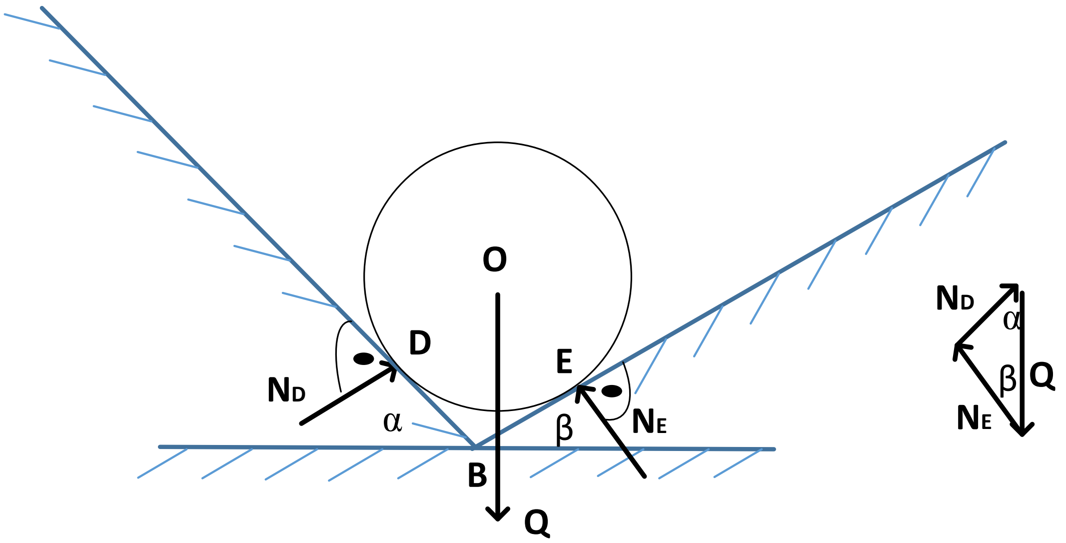
MEHANIKA 2020.

1. Homogena kugla O težine Q oslanja se tačkama D i E o dve glatke strme ravni AB i BC. Ravni su pod uglovima α i β nagnuti prema horizontali. Odrediti reakcije veza.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile i sinusne teoreme.

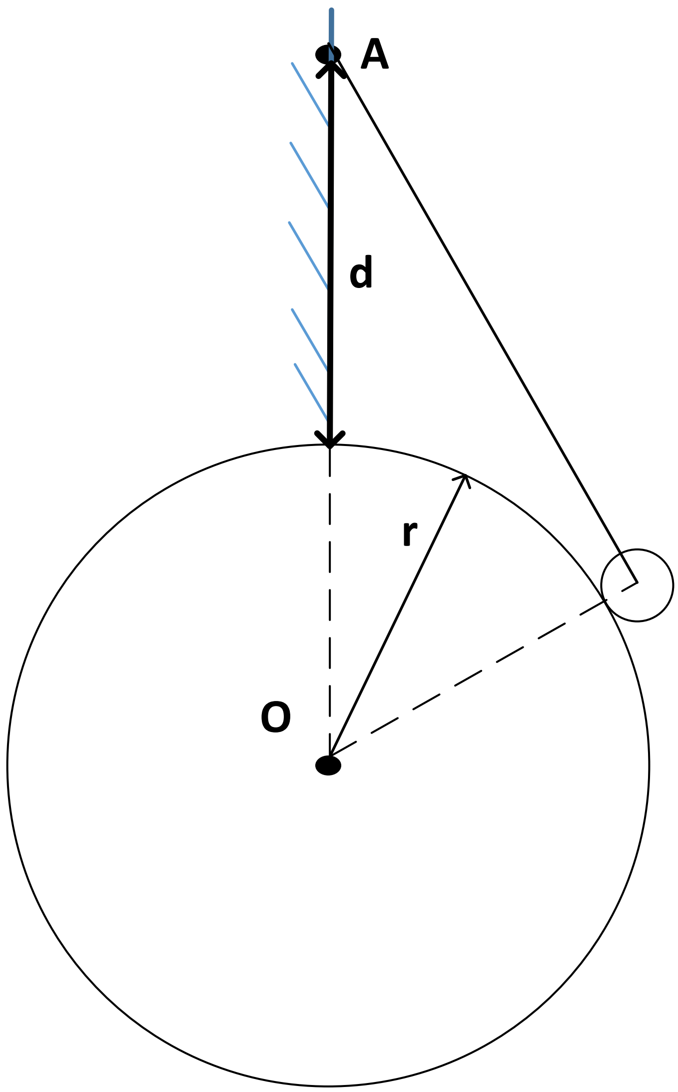


$$\frac{N_E}{sin\alpha} = \frac{N_D}{sin\beta} = \frac{Q}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{Q}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$N_E = \frac{sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} Q$$

$$N_D = \frac{sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} Q$$

2. Kuglica B težine *Q* vezana je užetom AB za nepomičnu tačku A i oslanja se na nepomičnu kuglu poluprečnika *r*. Tačka A se nalazi na vertikali koja prolazi kroz centar kugle. Poznata je dužina užeta sa slike *l* i odstojanje *d* sa slike. Odrediti silu u žetu i rekaciju veze sa kuglom.

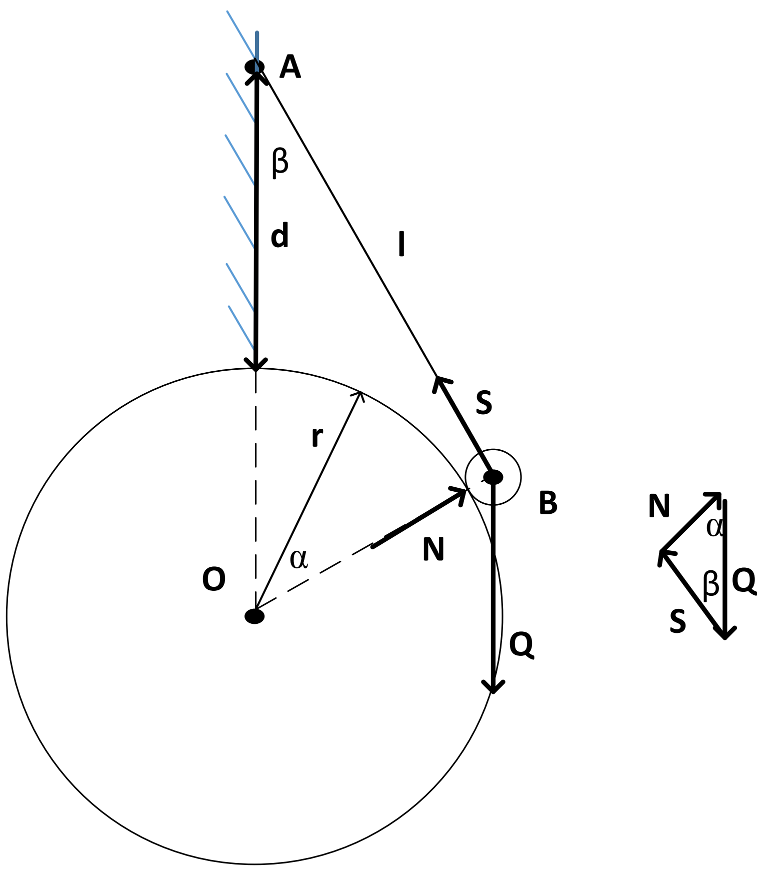


Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile, sličnosti trouglova i sinusne teoreme. Slični trouglovi su OAB i trougao koji čine vektori tri sile.

$$\frac{N}{r} = \frac{S}{l} = \frac{Q}{\mathrm{d+r}}$$

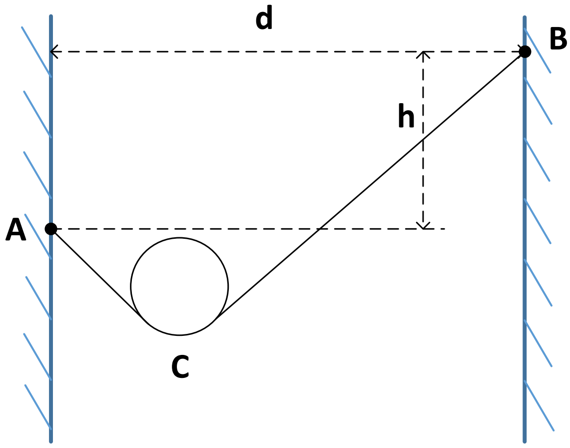
$$N = \frac{r}{\mathrm{d+r}} Q$$

$$S = \frac{l}{\mathrm{d+r}} Q$$



A
β
d
l
S
r
B
N
O
α
N
Q
N
α
β
Q
S

3. Gladak kotur, težine $Q = 180\ N$, može da klizi po gipkom užetu ACB dužine $L = 5\ m$, čiji su krajevi A i B učvršćeni za glatke vertikalne zidove tako da je uzvišenje jedne tačke u odnosu na drugu $3\ m$. Odstojanje zidova je $d = 4\ m$. Odrediti silu u užetu zanemarujući njegovu težinu.



Rešenje: Pošto je kotur gladak, onda on klizi i nema trenja pa je S1 = S2 i α1 = α2 = α.

$$\frac{Q}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{S}{\sin(\alpha)} = \frac{Q}{\sin(2\alpha)} = \frac{Q}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

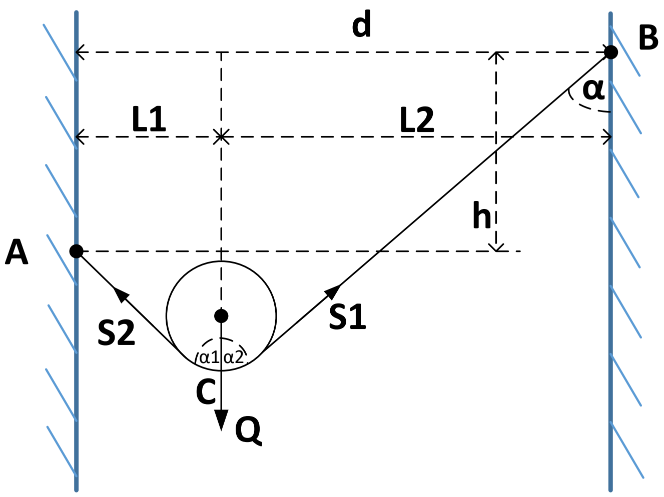
$$\Rightarrow S = \frac{Q}{2\cos(\alpha)}$$

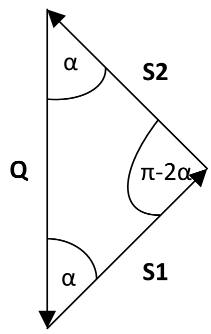
$$L_1 = \overline{AC}\sin\alpha \qquad L_2 = \overline{BC}\sin\alpha$$

$$L_1 + L_2 = d = (\overline{AC} + \overline{BC})\sin\alpha = L\sin\alpha \ \Rightarrow\ \sin\alpha = \frac{d}{L}$$

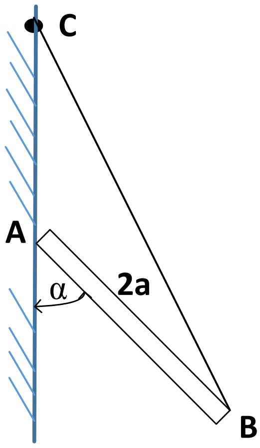
$$\Rightarrow\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{Q}{2\sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2}}$$





4. Homogeni prizmatični štap AB dužine 2*a* i težine *G* oslanja se krajem A na vertikalni glatki zid. Drugi njegov kraj B pridržava uže koje je vezano za tačku C. Ako su poznate veličine *a, G* i ugao *α* između štapa i zida odrediti reakcije veza i položaj tačke C za koju treba vezati uže u položaj ravnoteže.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile, sličnosti trouglova i. Slični trouglovi su CKB i trougao oab koji čine vektori tri sile.

$$tg\beta = \frac{N}{G}$$

$$DB = asin\alpha$$

$$DE = 2acos\alpha$$

$$tg\beta = \frac{DB}{DE} = \frac{asin\alpha}{2acos\alpha} = \frac{1}{2}tg\alpha$$

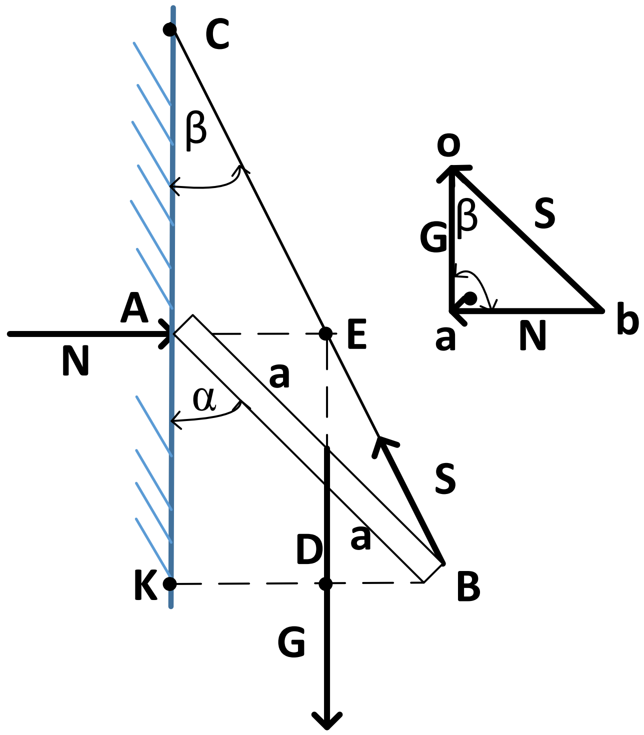
$$N = G\frac{1}{2}tg\alpha$$

$$S = G\sqrt{1 + \frac{1}{4}tg\alpha^2}$$

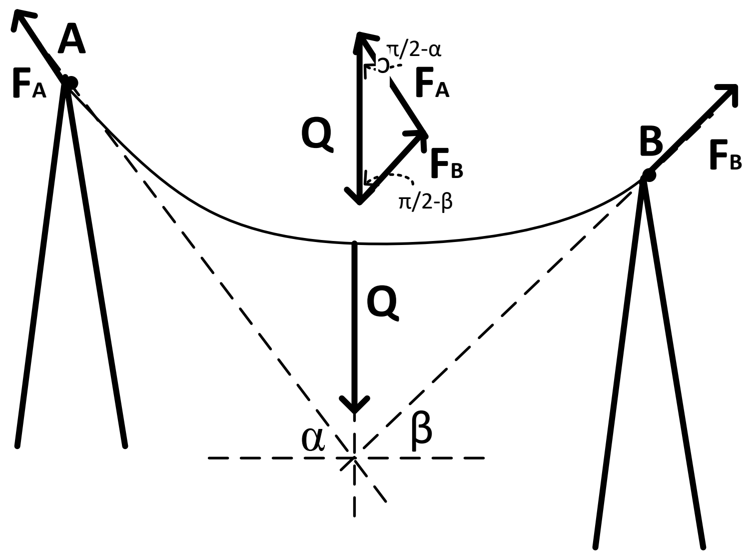
$$tg\beta = \frac{KB}{CK}$$

$$KB = 2asin\alpha$$

$$CK = AC + ED = AC + 2acos\alpha = \frac{2asin\alpha}{\frac{1}{2}tg\alpha} = 4acos\alpha$$


C
β
A
N
E
a
α
S
D
a
K
B
G
o
G
β
S
a
N
b

5. Obična lančanica p=40N/m spaja dve tačke A i B na rastojanju od 120m. Uglovi između nategnute lančanice i horizontale su α=20˚ i β=10˚.



Rešenje: Primena teoreme o ravnoteži tri sile i sinusne teoreme.

$$\frac{S_A}{sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}=\frac{S_B}{sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{Q}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$S_A=\frac{cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}Q$$

$$S_B=\frac{cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

<u>Prvila, uputstva kod rešavanja zadataka iz statike:</u>

1) Uočiti kruto telo,

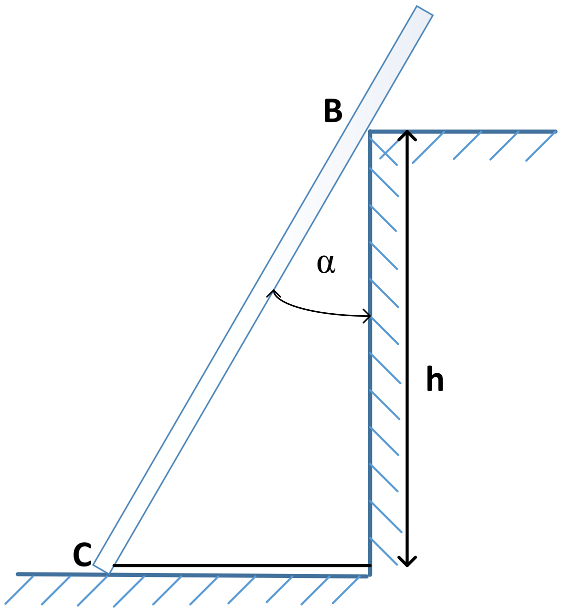
2) Osloboditi se veza i označiti sve sile na slici,

3) Postaviti koordinatni sistem po slobodnoj volji. Preporuka je da sentar koordinatnog sistema bude u tački gde se seče najveći broj sila, jer se na taj način izbegava pojavljivanje tih sila u momentnim jednačinama. Sile koje seku neku od osa ili su joj paparelne nemaju, ne stvaraju tu komponentu momenta.

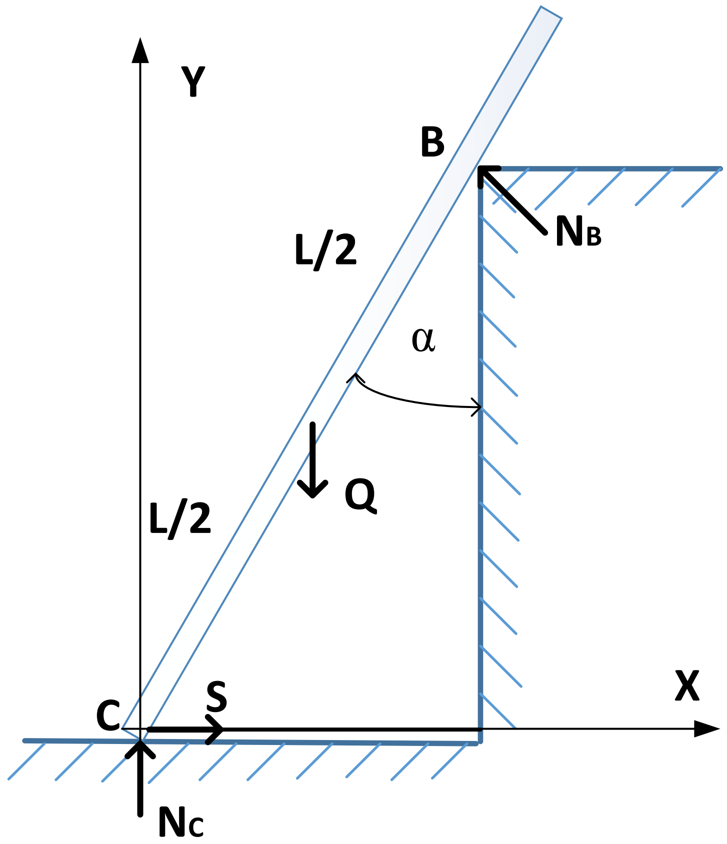
4) Postaviti SUR, Statičke Uslove Ravnoteže, maksimalno 6 jednačina.

5) Numerički rešiti jednačine i odrediti nepoznate u zadatku.

6. Homogena greda težine Q=60N i dužine L=4m oslanja se donjim krajem o glatki zid (tačka C), a gornjim krajem u tačku B o zid visine h=3m. Pri tom oslanjanju greda zaklapa ugao α=π/6 sa vertikalom. U tom položaju gredu održava uže prikačeno u tački C koje je zakačeno neposredno iznad poda. Odrediti silu zatezanja u užetu i reakcije podloga.



Rešenje:



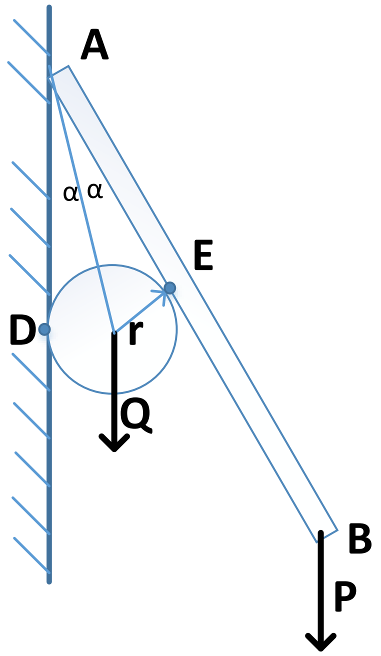
Posmatra se štap:

$$S - N_B \cdot cos\alpha = 0$$
$$-Q + N_C + N_B \cdot sin\alpha = 0$$

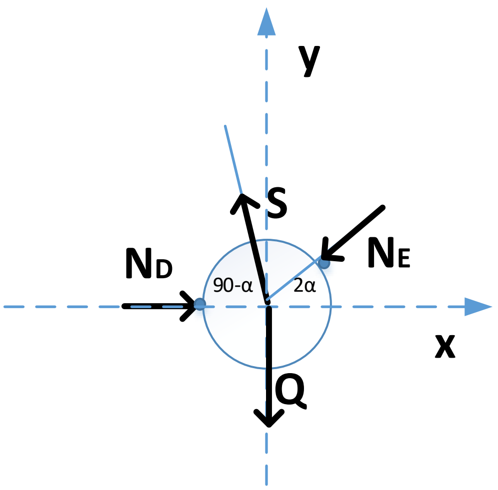
$$-Q \cdot l/2sin\alpha + N_B \cdot CB = 0$$
$$Q \cdot \frac{l}{2} sin\alpha = N_B \cdot h/cos\alpha$$
$$N_B = Q \cdot \frac{l}{2h} sin\alpha cos\alpha = 10\sqrt{3}\text{=17,3N}$$

$$N_C = Q - N_B \cdot sin\alpha = 51{,}35N$$
$$S = N_B \cdot cos\alpha = 15N$$

7. Homogena kružni disk poluprečnika r i težine Q vezan je užetom za tačku A, a u tački D se solanja na glatki vertikalni zid. Kruti štap AB, za čiji kraj B je okačen teret težine P zglobno je vezan za zid (cilindrični zglob u tački A) i oslanja se na disk kao na slici. Poznate veličine su r, Q, P, AB=L i α. Težinu užeta i štapa zanemariti. Izračunati silu u užetu, pritisak diska na zid i diska na štap.



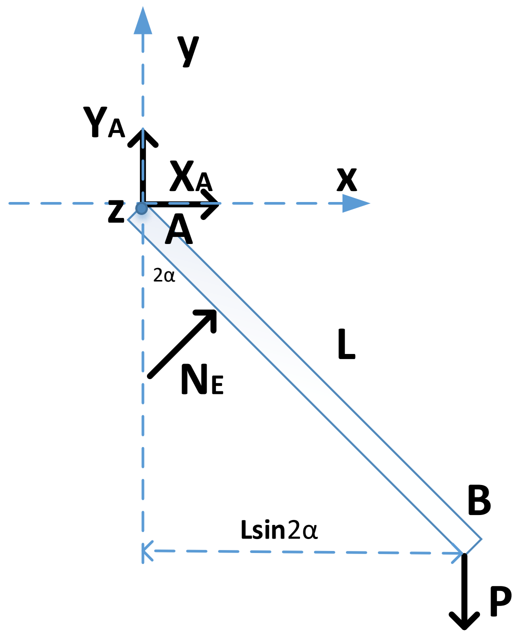
Rešenje: Prvo se posmatra samo disk kao kruto telo:



$$\sum X = N_D - N_E \cdot cos2\alpha - Scos(90 - \alpha) = N_D - N_E \cdot (cos^2\alpha - sin^2\alpha) - Ssin\alpha = 0$$

$$\sum Y = -Q - N_E \cdot sin2\alpha + Ssin(90 - \alpha) = -Q - N_E \cdot 2sin\alpha cos\alpha + Scos\alpha = 0$$

Momentne jednačine ne postoje jer se sve sile seku u koordinatnom početku, koji je izabran da bude centar diska. Zatim se posmatra samo štap kao kruto telo u cilju dobijanja treće jednačine. Centar koordinatnog sistema štapa je postavljen u cilindričnom sglobu A jer se tu seku dve sile reakcije zgloba:



$$\sum M_{AZ} = -P \cdot sin2\alpha \cdot L + N_E \cdot AE = 0$$

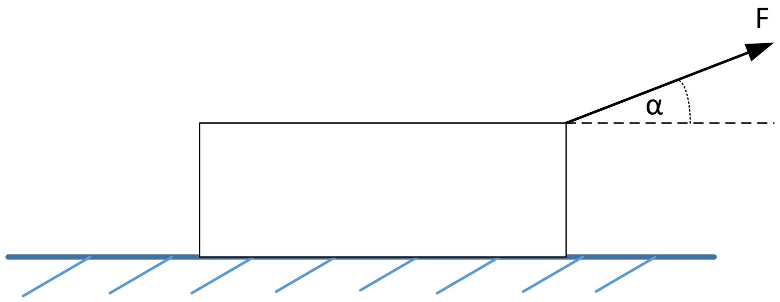
$$tg\alpha = \frac{r}{AE}, AE = \frac{r}{tg\alpha}$$

$$P \cdot 2sin\alpha cos\alpha \cdot L = N_E \cdot \frac{rcos\alpha}{sin\alpha}, N_E = P \cdot 2sin^2\alpha\frac{L}{r}$$

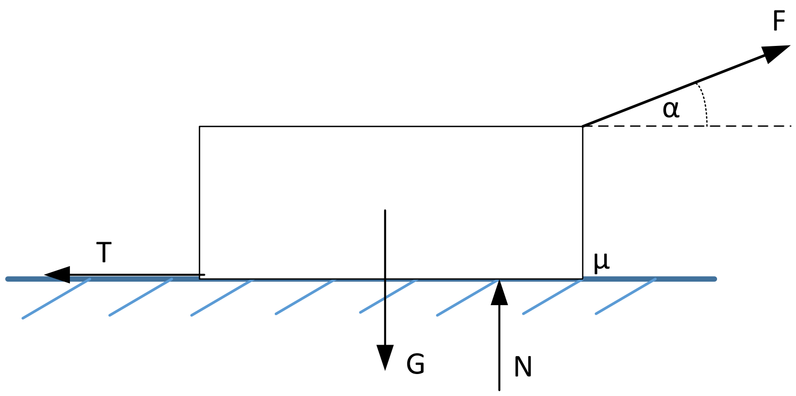
$$S = \frac{Q}{cos\alpha} + P \cdot 2sin^3\alpha\frac{L}{r},$$

$$N_D = Qtg\alpha + P \cdot 2sin^2\alpha\frac{L}{r},$$

8. Sanduk težine G koji leži na hrapavoj horizontalnoj ravni treba pokrenuti silom F čija napadna linija zaklapa sa horizontalom ugao α. Odrediti ugao α tako da je intenzitet sile F najmanji, kao i vrednost tog intenziteta.



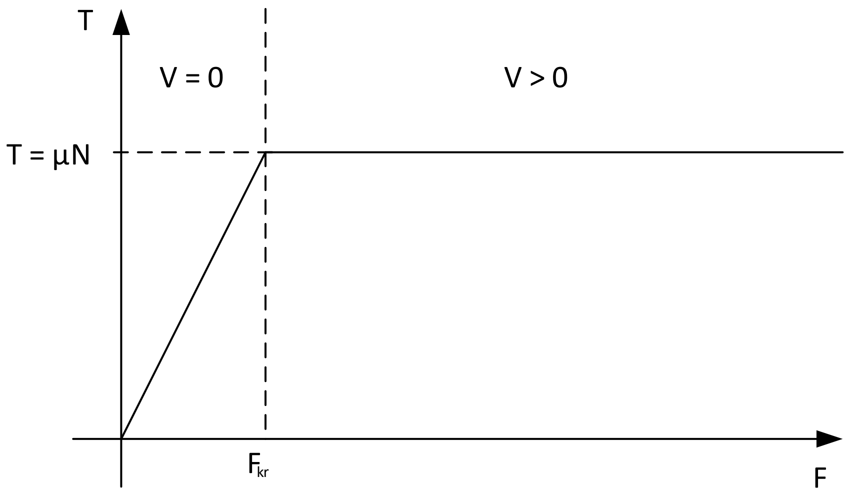
Rešenje:



Sila trenja T se suprotstavlja kretanju:

$$\boldsymbol{T < \mu N \Rightarrow v = 0}$$

$$\boldsymbol{T = \mu N \Rightarrow v > 0}$$



U režimu mirovanja tela ($v = 0$) intenzitet sile F nije premašao kritičnu vrednost i važi:

$$\boldsymbol{\Sigma x = 0 \Longrightarrow F\cos\alpha - T = 0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma y = 0 \Longrightarrow F\sin\alpha + N - G = 0}$$

Treća, momentna jednačina, ΣM_{oz}, ne može se napisati jer napadna tačka sile N nije poznata, pa se ova jednačina ne piše. Iz prethodne dve jednačine sledi:

$$\boldsymbol{T = F\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{N = -F\sin\alpha + G}$$

Kada intenzitet sile F premaši kritičnu vrednost F_{kr} telo počinje da se kreće ($v > 0$) i vrednost sile trenja (otpora kretanju) postaje konstantna, $T = \mu N$.

U graničnom trenutku kada je $F = F_{kr}$ važe prethodne dve jednačine, plus jednačina $T = \mu N$, pa se kombinacijom ove tri jednačine dobija:

$$\boldsymbol{T = \ \mu N = \mu(-F\sin\alpha + G) = F\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

Diferenciranjem F po uglu α i izjednačavanjem tog izraza sa nulom, dobija se vrednost ugla α za koju se ima minimalni intenzitet sile F.

$$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = \frac{-\mu G(\mu\cos\alpha^* - \sin\alpha^*)}{(\mu\sin\alpha^* + \cos\alpha^*)^2} \Longrightarrow \mu\cos\alpha^* - \sin\alpha^* = 0 \Longrightarrow \mu = \tan\alpha^*}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \alpha^* = \tan^{-1}\mu}$$

Minimalni intenzitet sile F se dobija kada se uvrsti dobijeni ugao α^* u izraz za F.

$$\boldsymbol{F_{min} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^* + \mu\sin\alpha^*} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*\,(1 + \mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*\,(1 + \mu\tan\alpha^*)}}$$

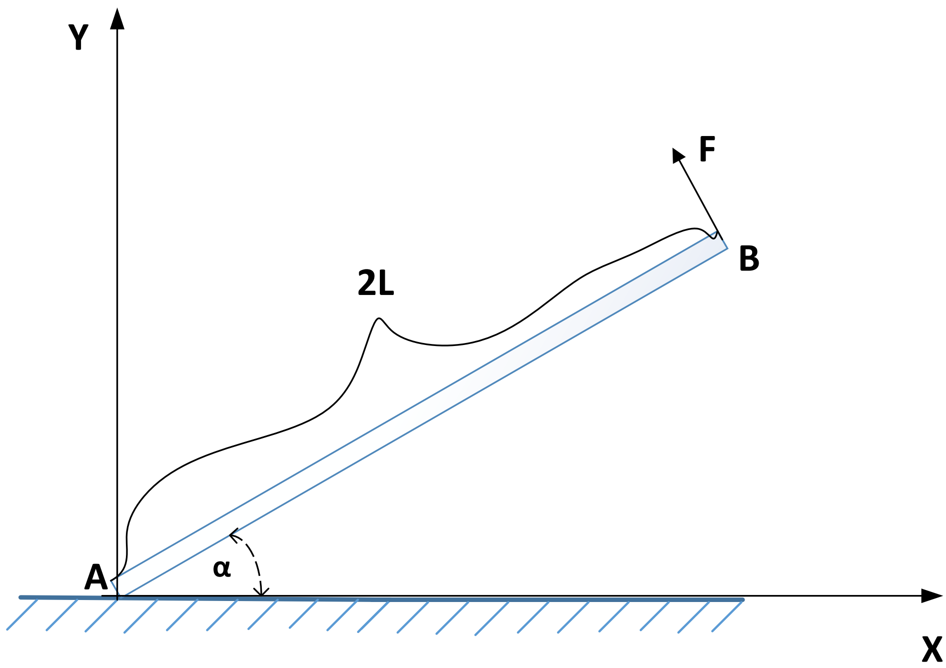
Kako je

$$\cos\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha^*)^2}} \quad \| \quad \mu = \tan\alpha^*$$

Tako se dobija intenzitet sile F:

$$F_{min} = \frac{\mu G}{\cos\alpha^*\,(1+\mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G\sqrt{1+(\tan\alpha^*)^2}}{(1+\mu\tan\alpha^*)} = \frac{\mu G\sqrt{1+\mu^2}}{(1+\mu^2)} = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

9. Homogeni štap dužine $AB = 2L$ i težine G drži u ravnoteži sila F koja ima osobinu da je stalno normalna na pravac AB. Ravnoteža postoji za $0^\circ < \alpha < 15^\circ$. U trenutku kada je $\alpha = \alpha_1 = 15^\circ$ štap počinje da klizi. Odrediti:
   a) koeficijent klizanja
   b) za koje μ štap neće klizati.



Rešenje:

a)

$$\Sigma x = 0 \Rightarrow T - F\cos(90^\circ - \alpha) = 0 \Rightarrow T = F\sin\alpha$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow -G + N + F\sin(90^\circ - \alpha) = 0 \Rightarrow G = N + F\cos\alpha$$

$$\Sigma Moz = 0 \Rightarrow -G\cdot L\cos\alpha + 2L\cdot F = 0 \Rightarrow 2F = G\cos\alpha$$

$$F = \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$T = \frac{G}{2}\cos\alpha\sin\alpha$$

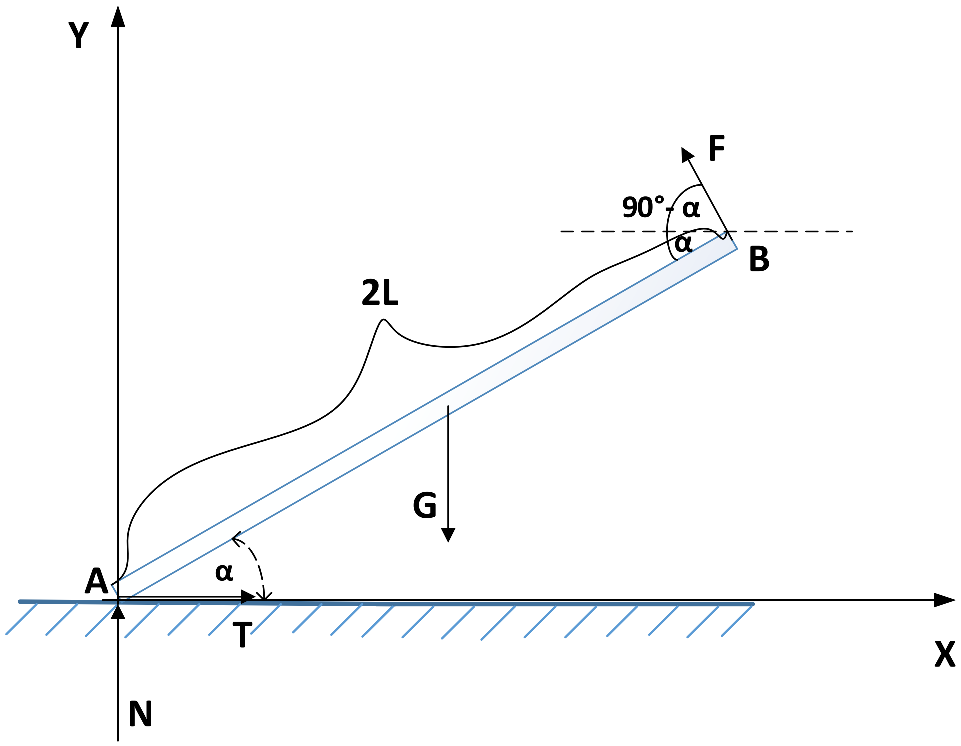
$$N = G\left(1 - \frac{(\cos\alpha)^2}{2}\right) = G \cdot \frac{3 - \cos 2\alpha}{4} \quad \| \quad (\cos\alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$0^\circ < \alpha < 15^\circ \Rightarrow T < \mu N \, ; v = 0$$

$$\alpha = \alpha_1 = 15^\circ \Rightarrow T = \mu N = \mu G \cdot \frac{3 - \cos 2\alpha_1}{4} = \frac{G}{2} \cos\alpha_1 \sin\alpha_1$$

$$\mu(3 - \cos 2\alpha_1) = 2\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 = \sin 2\alpha_1$$

$$\mu = \frac{\sin 2\alpha_1}{3 - \cos 2\alpha_1} = \frac{\sin 30^\circ}{3 - \cos 30^\circ} = 0,234$$



b)

U prethodnoj tački je izračunat koeficijent μ čija vrednost izaziva proklizavanje štapa pri uglu $\alpha = 15^\circ$. U ovoj tački potrebno je pronaći koeficijent μ tako da štap ne klizi za svaki ugao α iz opsega $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Pri nekom uglu α^* javiće se najveća težnja štapa da prokliza. Iz tog kritičnog ugla α^* odrediće se koeficijent μ. Tako je obezbeđeno da pri svim drugim uglovima α štap ne klizi.

Kada je $\alpha = \alpha^*$ (sve je isto kao u prethodnoj tački, samo je ugao α^* umesto α_1):

$$\mu_{max} = \frac{\sin 2\alpha^*}{3 - \cos 2\alpha^*}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{2\cos 2\alpha\,(3 - \cos 2\alpha) - \sin 2\alpha\,(2\sin 2\alpha)}{(3 - \cos 2\alpha)^2} = 0$$

$$6\cos 2\alpha - 2(\cos 2\alpha)^2 - 2(\sin 2\alpha)^2 = 0$$

$$6\cos 2\alpha - 2 = 0$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} = 35,26^\circ$$

$$\mu_{max} = 0,354$$