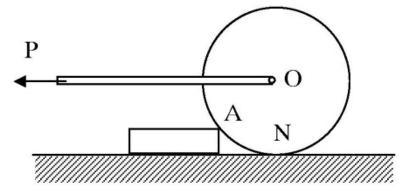
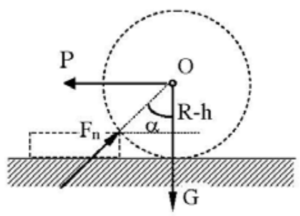
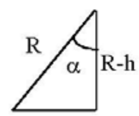
Kolikom horizontalnom silom P treba vući valjak da bi prešao prag visine h? Poluprečnik valjka je R, a njegova težina G.



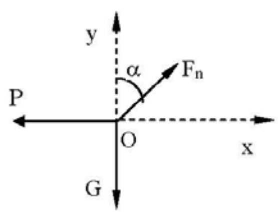




$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

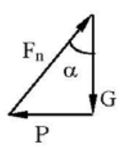
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R}$$



$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad -P + F_n \sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad -G + F_n \cos\alpha = 0;$$

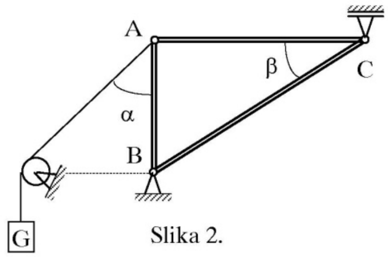
$$F_n = G\frac{R}{R-h} \qquad P = G\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$



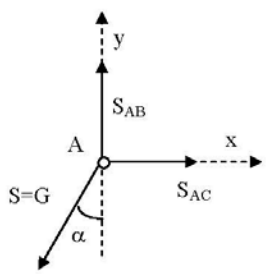
$$G = F_n \cos\alpha\,; \quad F_n = \frac{G}{\cos\alpha};$$

$$P = F_n \sin\alpha\,; \quad P = G\cdot \mathrm{tg}\alpha\,;$$

Zglobno vezani laki štapovi AC, AB i BC čine trougao ABC, koji se nalazi u vertikalnoj ravni. Trougao se oslanja u B na nepokretan, a u C na pokretan oslonac. Teret, težine G,vezan je za konac a njegov drugi kraj zglob za A. Za dati položaj ravnoteže odrediti reakcije u osloncima B i C i sile u štapovima.



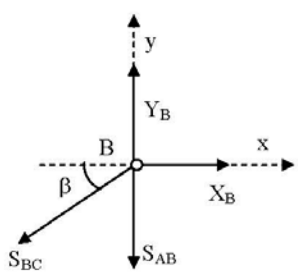
Slika 2.



$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad S_{AC} - S\sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad S_{AB} - S\cos\alpha = 0;$$

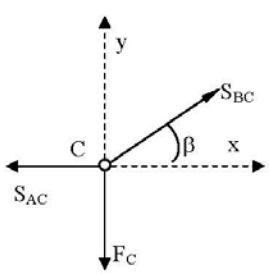
$$\underline{\underline{S_{AC} = G\sin\alpha}} \qquad \underline{\underline{S_{AB} = G\cos\alpha}}$$



$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad X_B - S_{BC}\cos\beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad Y_B - S_{AB} - S_{BC}\sin\beta = 0;$$

$$\underline{\underline{X_B = G\sin\alpha}} \qquad \underline{\underline{Y_B = G\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta};}}$$

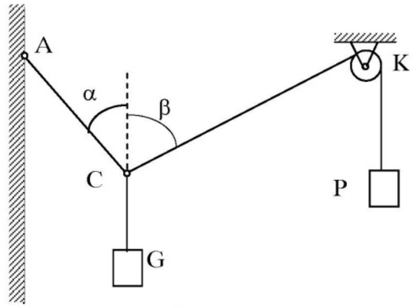


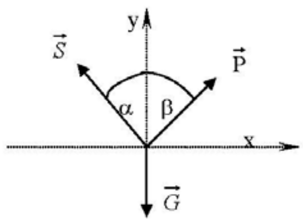
$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad S_{BC}\cos\beta - S_{AC} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad S_{BC}\sin\beta - F_c = 0;$$

$$\underline{\underline{F_C = G\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}} \qquad \underline{\underline{S_{BC} = G\frac{\sin\alpha}{\cos\beta};}}$$

Telo težine G vezano je u tački C za uže čiji je drugi kraj vezan za vertikalnu ravan u tački A a drugi prebačen preko nepomičnog kotura K. Odrediti silu u delu užeta AC i veličinu tereta P na slobodnom kraju užeta u ravnotežnom položaju za koji je α=45^0 i β=60^0.

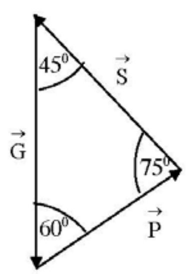




$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad P\sin\beta - S\sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad -G + P\cos\beta + S\cos\alpha = 0;$$

$$\underline{P = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot G} \quad \underline{S = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot G}.$$



$$\frac{G}{\sin 75^0} = \frac{P}{\sin 45^0} = \frac{S}{\sin 60^0}$$

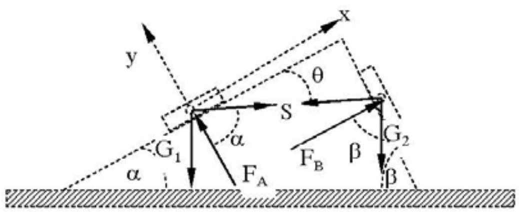
$$\sin 75^0 = \sin(30^0 + 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\underline{P = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot G} \qquad \underline{S = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot G}.$$

Duž dve glatke kose ravni koje se seku pod pravim uglom i sa horizontalom grade uglove α i β mogu da klize dva tereta težine G1 i G2, koji su spojeni nerastegljivim užetom AB.

a) Pri kom uglu θ se sistem nalazi u položaju ravnoteže,

b) Za date podatke $\alpha=30^0$, G1=2G2=G izračunati brojnu vrednosti ulga θ, silu u užetu i otpore kosih ravni.



Teret A.

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad S\cos\theta - G_1 \sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad F_A - G_1 \cos\alpha - S\sin\theta = 0;$$

Teret B.

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad F_B - G_2 \cos\beta - S\cos\theta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad S\sin\theta - G_2 \sin\beta = 0;$$

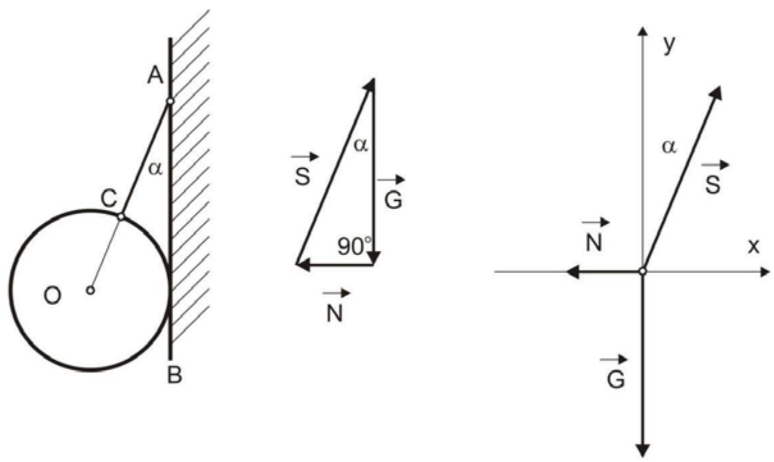
) $S\sin\theta = G_2 \sin\beta$

$S\cos\theta = G_1 \sin\alpha$ $\quad \underline{\underline{tg\theta = \dfrac{G_2 \sin\beta}{G_1 \sin\alpha}}}$;

b) $\underline{\underline{tg\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{7}$, $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$;

$\underline{\underline{S = \dfrac{\sqrt{7}}{4} G}}$, $\underline{\underline{F_A = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} G}}$, $\underline{\underline{F_B = \dfrac{3}{4} G}}$;

O vertikalni glatki zid AB oslonjena je kugla O, obešena o konac AC. Ugao koji konac zaklapa sa zidom je α, težina kugle je G.
Odrediti silu u koncu i pritisak N kugle na zid.



Primenom sinusne teoreme

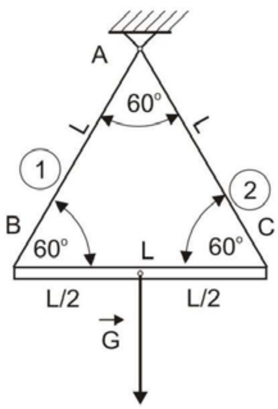
$$\frac{G}{sin\,(90°-\alpha)} = \frac{N}{sin\alpha} = \frac{S}{sin\,90°}$$

$$sin90° = 1; \quad sin(90° - \alpha) = cos\alpha$$

$$N = G\frac{sin\alpha}{sin\,(90°-\alpha)} = G\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = Gtg\alpha$$
$$S = G\frac{sin\,90°}{sin\,(90°-\alpha)} = \frac{G}{cos\alpha}$$

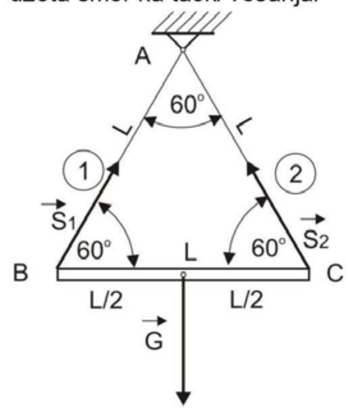
Drugi način:

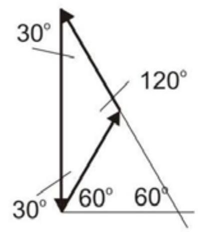
1) $\sum X_i = Ssin\alpha - N \ = 0$ iz 1) sledi
$N = S\,sin\alpha$
2) $\sum Y_i = Scos\alpha - G = 0$ pa se dobija
$S = \frac{G}{cos\alpha}$ odnosno
$N = \frac{G}{cos\alpha}\ sin\alpha = Gtg\alpha$



Žardinjera tržine $\vec{G}$ okačena je o dva nerastegljiva užeta. Ugao koji zaklapaju užad okačena u tački A je $\alpha=60°$. Dužina užadi i širina žardinjere su jednaki i iznose L=50cm.Odrediti sile u užadima, ako je težina žardinjere100 N.

Veze zamenimo reakcijama veza u užadima, pravac užeta smer ka tački vešanja.





Analitičko rešenje:

Aanalizom trougla sila i primenom sinusne teoreme:

$$\frac{S_1}{sin\alpha} = \frac{S_2}{sin\beta} = \frac{G}{sin\gamma} \quad \leftrightarrow \alpha = \beta = 30°$$

$$\frac{S_1}{sin\,30°} = \frac{S_2}{sin\,30°} = \frac{G}{sin\,120°}$$

$$\frac{S_1}{0.5} = \frac{S_2}{0.5} = \frac{G}{0.866} \rightarrow S_1 = \frac{100 \cdot 0.5}{0.866} = 57.697N \rightarrow S_2 = \frac{100 \cdot 0.5}{0.866} = 57.7N$$

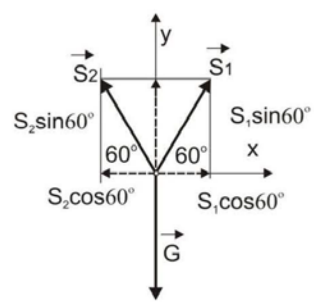
Drugi način analitičkog rešavanja:

$X_1 = S_1 cos60° = 0.5S_1;$

$Y_1 = S_1 sin60° = 0.866 \cdot S_1;$

$X_2 = S_2 cos60° = 0.5S_2;$

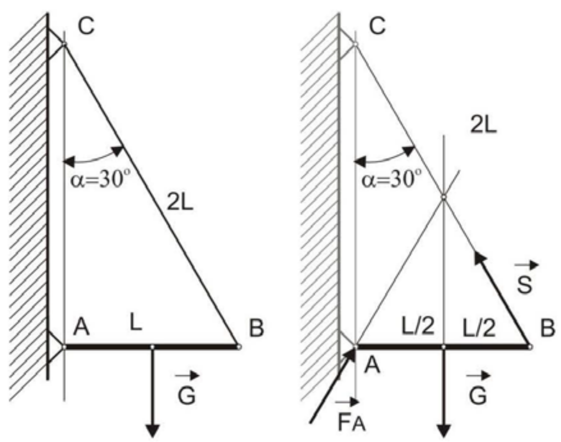
$Y_1 = S_2 sin60° = 0.866 \cdot S_2;$



1. $\sum X_i = 0 = X_1 - X_2 = S_1 cos60° - S_2 cos60° = 0 \rightarrow S_1 = S_2$
2. $\sum Y_i = 0 = Y_1 + Y_2 - G = S_1 sin60° + S_2 sin60° - G = 0$

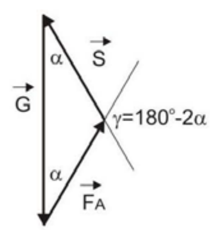
$2S_2 sin60° - G = 0 \rightarrow S_2 = S_1 = \frac{G}{2sin\,60°} = \frac{100}{2 \cdot 0.866} = 57.7\ N$

Greda tržine $\vec{G} = 50N$ na jednom kraju tački A vezana je nepokretnim cilindričnim zglobom a na drugom u tački B je zakačeno idealno neistegljivo elastično uže. Svojim drugim krajem uže je vezano za vertikalni zid u tački C koja je vertikalno iznad tačke A. . Ugao koji zaklapa uže sa vertikalom je $\alpha{=}30^{\circ}$. Dužina užeta je dvostruko veća od dužine grede, koja je dugačka L=1m.



Veze zamenjujemo odgovarajućim reakcijama veza. U užetu imamo silu u pravcu užeta to jest pod uglom od 30o u odnosu na vertikalnu ravan. Kada se oslobodimo nepokretnog cilindričnog zgloba reakcija je kosa sila u ravni. Na gredu deluje i njena težina, kao aktivna sila. Pošto na telo deluju tri sile prema teoremi o tri sile: Ako je telo u ravnoteži pod dejstvom tri samo sile onda one moraju imati zajedničku napadnu tačku odnosno one su sučeljne.

Na osnovu ove teoreme utvrđuje se pravac reakcije oslonca A. Pravac mora proći kroz tačku A i presečnu tačku vertikale iznad težišta i pravca užeta. Sa slike se vidi da reakcija veze zaklapa ugao sa horizontalom od 60°, odnosno 30° sa vertikalnim zidom.



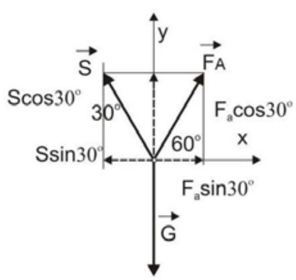
Primenom sinusne teoreme na trougao sila može se odrediti:

$$\frac{S}{sin\alpha} = \frac{F_A}{sin\alpha} = \frac{G}{sin\gamma} \quad \leftrightarrow \alpha = \beta = 30°$$

$$\frac{S}{sin\,30°} = \frac{F_A}{sin\,30°} = \frac{G}{sin\,120°}$$

$$\frac{S}{0.5} = \frac{F_A}{0.5} = \frac{G}{0.866} \rightarrow S = \frac{50 \cdot 0.5}{0.866} = 28.87N$$

$$F_A = \frac{100 \cdot 0.5}{0.866} = 28.87N$$



Drugi način:

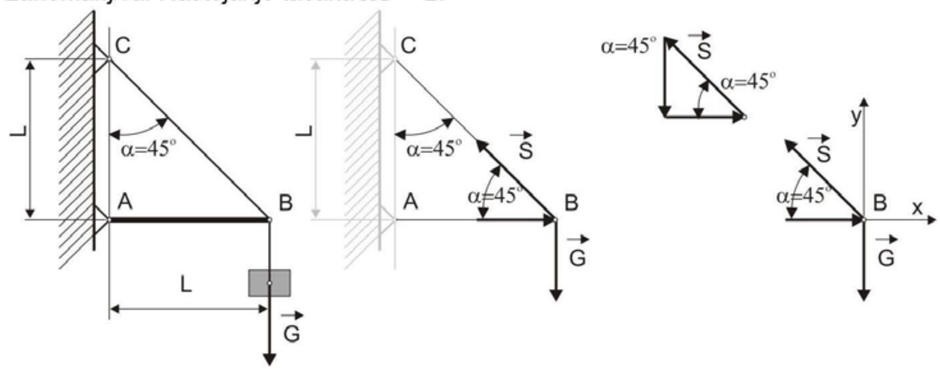
$$\sum X_i = 0 = X_1 + X_A = -Scos60° + F_Acos60° = 0$$

Odakle se dobija $S = F_A$

$$\sum Y_i = 0 = Y_1 + Y_A - G = Ssin60° + F_Asin60° - G = 0$$

$$2Ssin60° - G = 0 \rightarrow S = \frac{G}{2sin\,60°} = \frac{50}{2 \cdot 0.866} = 28.87\ N$$

Teret težine $\vec{G} = 100N$ zakačen je idealno neistegljivo elastično na kraj lakog horizontalnog štapa B. Drugi kraj štapa je zglobno vezan u tački A. U tački B je zakačeno idealno neistegljivo elastično uže. Svojim drugim krajem uže je vezano za vertikalni zid u tački C koja je vertikalno iznad tačke A. Ugao koji zaklapa uže sa vertikalom je $\alpha=45^{\circ}$. Dužina štapa je L, a kako je laki štap to je njegova težina zanemarljiva. Rastojanje tačaka $\overline{AC} = L$.



Iz trougla sila može se uočiti:

$tg\alpha = \frac{G}{F_A} = tg45° = 1 \rightarrow F_A = G = 100N$

$sin\alpha = \frac{F_A}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow S = \sqrt{2} \cdot F_A = \sqrt{2} \cdot G = 141.42N$

Drugi način:

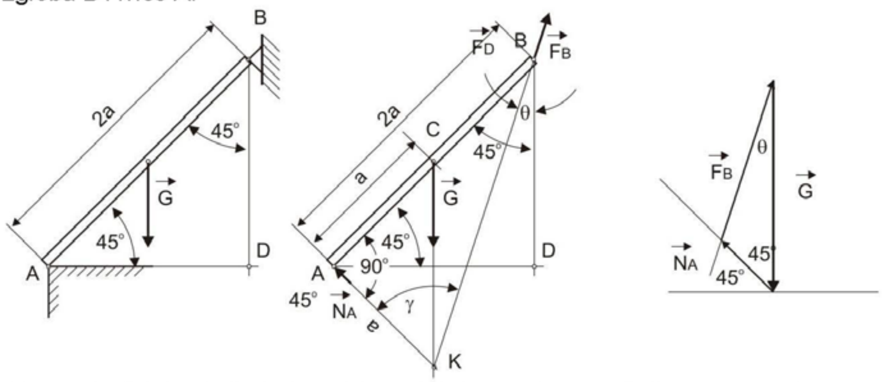
$\sum X_i = 0 = X_1 + X_A = -Scos45° + F_A = 0 \rightarrow F_A = Scos45° = S\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sum Y_i = 0 = Y_A - G = Ssin45° - G = 0 \rightarrow S = \frac{G}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot G$

$S = \sqrt{2} \cdot G = 141.42N$

$F_A = S\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot G \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = G = 100\ N$

Homogena greda AB dužine 2a i težine G, vezana je krajem B za nepokretan zglob, dok je krajem A oslonjena na ivicu. Greda je glatka a u položaju ravnoteže leži u vertikalnoj ravni, i gradi sa vertikalom i horizontalom uglove od 45°. Odrediti reakcije zgloba B i ivice A.



Na gredu deluju tri sile jedna aktivna G i dve pasivne reakcija veze nepokretnog zgloba – sila u ravni FB i sila reakcije glatkog oslonca NA, upravna na gredu.
Pošto na gredu deluju tri sile a sistem je u ravnoteži, prema teoremi o ravnoteži tela pod dejstvom tri sile, sile moraju biti sučeljne. Sučeljne znači da ako im se produže pravci dejstva moraju imati zajedničku presečnu tačku, označenu na crtežu sa K.
Iz ovog uslova određuje se pravac dejstva reakcije zglobne veze B.
Pošto je telo u ravnoteži trougao sila mora biti zatvoren, pa se kao rezultat dobijaju intenzitetireakcija.
Analitički zadatak se rešava na više načina.
Jedan način je iz analize trouglova odrediti

$$tg(45° - \theta) = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow (45° - \theta) = artg\frac{1}{2} = 26.565° \rightarrow \theta = 18.435°$$

Trougao koga obrazuju sile ima uglove θ, ugao od 45° i treći ugao od

$180 - 45 - \theta = 116.565°$,

primenom sinusne teoreme:

$$\frac{N_A}{sin\theta} = \frac{F_B}{sin\,45°} = \frac{G}{sin\,(116.565)}$$

Odavde

$$N_A = \frac{Gsin\theta}{sin\,(116.565)°} = 0.3535G$$

$$F_B = \frac{Gsin\,45°}{sin\,(116.565)°} = 0.79057G$$

Drugi način rešavanja je primenom uslova ravnoteže

1. $\sum X_i = 0 = -N_A cos45° + X_B = 0$
2. $\sum Y_i = 0 = N_A sin45° - G + Y_B = 0$
3. $\sum M_B = 0 = -N_A 2a \cdot + Ga \cdot cos45° = 0$

Iz 3 sledi $N_A = \frac{G \cdot a \cdot cos\,45°}{2a} = \frac{G\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{G\sqrt{2}}{4}$

Iz 2 $Y_B = (G - N_A sin45°) = \left(G - \frac{G\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3G}{4}$

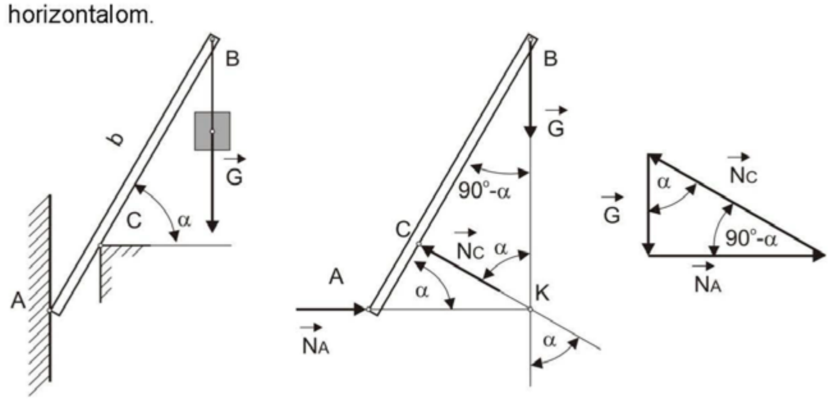
Iz 1 $X_B = N_A cos45° = \frac{G\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{G}{4}$

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{\left(\frac{G}{4}\right)^2 + \left(\frac{3G}{4}\right)^2} = G\frac{\sqrt{10}}{4} = 0.7905G$$

$$cos\theta = \frac{Y_B}{F_B} = \frac{\frac{3G}{4}}{G\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = 0.94868$$

$$\theta = arcos0.94868 = 18.4349°$$

Štap AB dužine L zanemarljive težine, na čijem kraju B je obešen teret M težine G, oslanja se glatkim krajem A na vertikalni glatki ravan zid, a u tački C na ivicu. Rastojanje AC je b/4. Odrediti reakcije veze ako štap obrazuje ugao α =60° sa horizontalom.



Da bi sistem bio u ravnoteži moraju biti zadovoljena dva uslova
Ako na telo deluju tri sile da bi bilo u ravnoteži te tri sile moraju biti sučeljne.
Znači da:

- pravac normalne reakcije u tački A normala na zid
- normalne reakcije u tački C normale na štap i
- vertikalan pravac iz tačke B moraju se seći u istoj tački

Ove sile mopraju obrazovati zatvoren trougao sila
Otuda proizilazi da je položaj tačke C definisan pošto se pravac sile Na i G seku u tački K to i normala iz tačke C na štap mora proći kroz K
Odnosno sa slike

$\overline{AK} = bcos\alpha$

$\overline{AC} = \overline{AK}cos\alpha = bcos\alpha \cdot cos\alpha = b \cdot cos^2\alpha$

$\alpha = 60° \rightarrow cos60° = \frac{1}{2} \rightarrow cos^2 = \frac{1}{4}$

Postavkom je dato $\overline{AC} = \frac{1}{4}b$ to je ovo ispunjeno dobijaju se rešenja iz trougla sila

$$tg\alpha = \frac{N_A}{G} \rightarrow N_A = Gtg\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{G}{N_C} \rightarrow N_c = \frac{G}{cos\alpha}$$

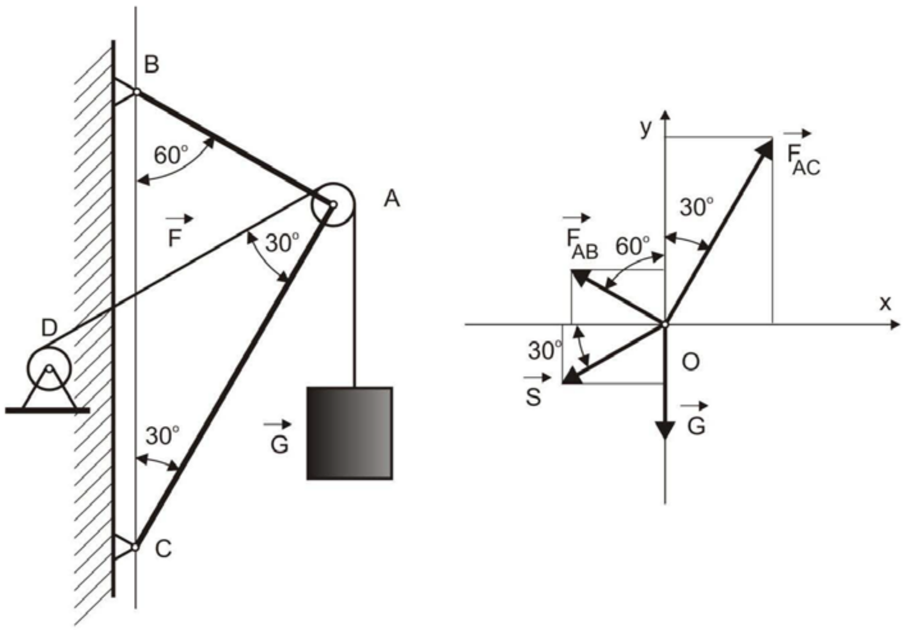
Rešenje primenom uslova ravnoteže:

1. $\sum X_i = 0 = N_A - N_C sin\alpha = 0 \rightarrow N_A = N_c sin\alpha$
2. $\sum Y_i = 0 = N_C cos\alpha - G = 0 \rightarrow N_C = \frac{G}{cos\alpha} \rightarrow N_A = N_c sin\alpha = \frac{Gsin\alpha}{cos\alpha} = Gtg\alpha$

Uslov ravnoteže da rastojanje AC bude

3. $\sum M_A = 0 = Gbcos\alpha - N_C\frac{b}{4} = 0 \rightarrow \overline{AC} = \frac{Gbcos\alpha}{N_C} = \frac{Gbcos\alpha}{\frac{G}{cos\alpha}} = bcos^2\alpha$

Teret težine 2 kN održava se u položaju ravnoteže nerastegljivim užetom koje je prebačeno preko kotura A zanemarljivih dimenzija, a namotano je na nepokretan kotur D. Štapovi AB i AC su zglobno vezani u tački A, a isto tako zglobno vezani za zid u tačkama B i C gradeći sa njim uglove od 60° odnosno 30°. Odrediti reakcije veze štapova ako se njihova težina zanemaruje. Uže AD gradi sa Štapom AC ugao od 30°.



Iz ravnoteže užeta preko kotura bez trenja

S=G

1) $\sum X_i = F_{AC} sin30° - F_{AB} sin60° - Scos30° = 0$

2) $\sum Y_i = F_{AC} cos30° + F_{AB} cos60° - Ssin30° - G = 0$

Iz 1) i zamenom S=G dobija se

$F_{AC}\frac{1}{2} - F_{AB}\frac{\sqrt{3}}{2} - G\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \; odnosno \; F_{AC} = \sqrt{3}(G + F_{AB})$

$\sqrt{3}(G + F_{AB})\frac{\sqrt{3}}{2} - F_{AB}\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} - G = 0$

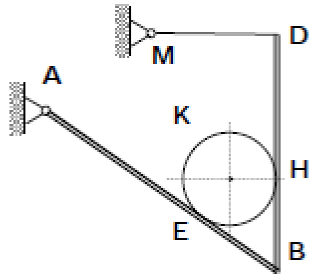
$\frac{3}{2}G + \frac{3}{2}F_{AB} - F_{AB}\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} - G = 0 \rightarrow F_{AB} = 0$

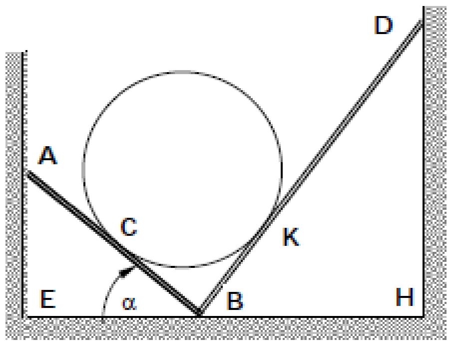
Rešenje je

$F_{AB} = 0$

$F_{AC} = \sqrt{3}G$

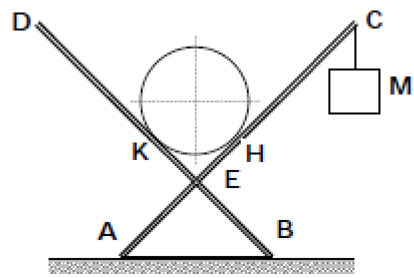
1. Homogeni ugaonik ABD, ukupne te`ine 2G, ~iji kraci AB=BD=R, zaklapaju ugao od $60^0$, vezan je krajem A za nepokretno le`i{te, a krajem D za horizontalno u`e MD, tako da krak BD zauzima vertikalan polo`aj. U ugaonik je postavljena kugla K, te`ine 3G, popre~nika $\sqrt{3}R/12$, koja se slobodno oslanja na njegove krake u ta~kama E i H. Odrediti sve reakcije veza.

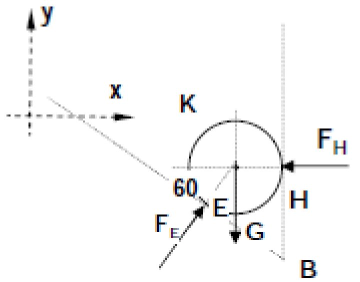




2. Homogeni pravougli ugaonik ABD, ~iji su kraci AB=2R, te`ine 2G i BD=3R, te`ine 3G, le`i u unutra{njosti pravougaone vertikalne {upljine i oslanja se na njenu osnovu i bo~ne strane u ta~kama B, A i D. U unutra{njosti ugaonika le`i disk polupre~nika R, te`ine G. Ugaonik svojim krakom AB zaklapa sa osnovom EH ugao α pri ~emu je tgα=4/3 . Za ravnote`ni polo`aj prikazan na slici odrediti sile pritiska kojim disk deluje na krakove ugaonika u ta~kama C i K i sile pritiska kojim ugaonik deluje na zidove u ta~kama A, B i D.

3. Homogeni {tapovi AC i BD, istih du`ina 6R i te`ina G, me|usobno su zglobno vezani u ta~ki E na rastojanju AE=BE=2R i postavljeni na glatku horizontalnu podlogu, pri ~emu su krajevi A i B {tapova vezani nerastegljivim lakim u`etom tako da je ugao AEB=$90^0$. Izme|u {tapova je postavljena kugla te`ine G, polupre~nika R. Za kraj C {tapa AC, obe{en je teret M, te`ine Q. Odrediti reakcije podloge u ta~kama A i B, silu u u`etu i reakcije zgloba E. Koliko mo`e biti najve}a te`ina tereta M, a da ne do|e do prevrtanja sistema?

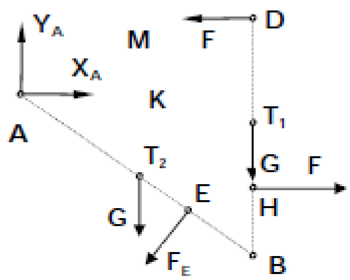




$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad -F_H + F_E\cos 60^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad -3G + F_E\cos 30^0 = 0;$$

$$\underline{F_H = \sqrt{3}G}, \quad \underline{F_E = 2\sqrt{3}G}.$$



$$\sum_{i=1}^{7} X_i = 0; \quad X_A - F_D + F_H + F_E\cos 60^0 \;\; = 0;$$

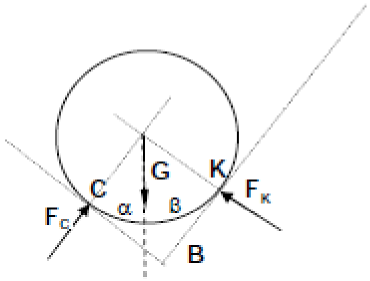
$$\sum_{i=1}^{7} Y_i = 0; \quad Y_A - G - G - F_E\cos 30^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{7} M_A^{F_i} = 0; \quad -F_D(R - R\cos 60^0) + GR\cos 30^0 - F_H\left(\frac{R}{2} - \frac{R}{4}\right) +$$

$$+ F_E\left(R - \frac{R}{4}\right) + G\frac{R}{2}\cos 30^0 = 0;$$

$$\underline{F_D = 4\sqrt{3}G}, \quad \underline{X_A = 4\sqrt{3}G}, \quad \underline{Y_A = 5G}.$$

2. Zadatak:

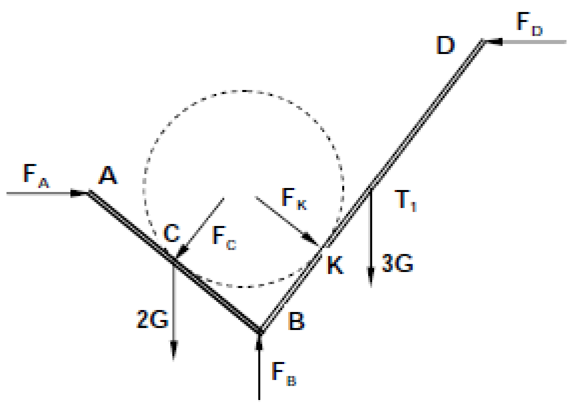


$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\beta=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{4}{5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_i=0;\quad F_C\sin\alpha - F_K\sin\beta=0;$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i=0;\quad F_C\cos\alpha + F_K\cos\beta - G=0;$$

$$\underline{F_K=\frac{4}{5}G},\ \underline{F_C=\frac{3}{5}G}.$$



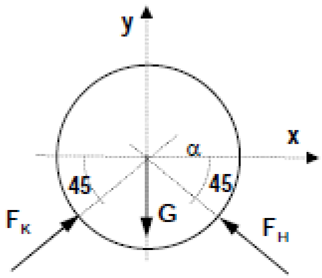
$$\sum_{i=1}^{7} X_i=0;\quad F_A - F_D - F_C\sin\alpha + F_K\sin\beta=0;$$

$$\sum_{i=1}^{7} Y_i=0;\quad F_C\cos\alpha - 2G - 3G - F_K\cos\beta + F_B=0;$$

$$\sum_{i=1}^{7} M_A^{F_i}=0;\quad F_C R + 2GR\cos\alpha - F_B 2R\cos\alpha + 3G(2R\cos\alpha + \frac{3R}{2}\cos\beta) +$$
$$+F_K R - F_D(3R\sin\beta - 2R\sin\alpha)=0;$$

$$\underline{F_B=6G},\ \underline{F_D=13G},\ \underline{F_A=13G}.$$

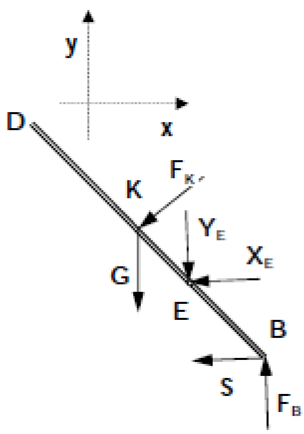
3. Zadatak:



$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad F_K \cos 45^0 - F_H \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad -G + F_K \sin 45^0 + F_H \sin 45^0 = 0;$$

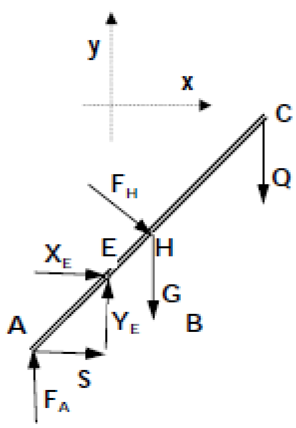
$$\underline{F_K = \frac{\sqrt{2}}{2} G} \qquad \underline{F_H = \frac{\sqrt{2}}{2} G}$$



$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad -S - X_E - F_K \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad F_B - Y_E - G - F_K \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B = 0; \quad -Y_E 2R \frac{\sqrt{2}}{2} - X_E 2R \frac{\sqrt{2}}{2} - G3R \frac{\sqrt{2}}{2} - F_K 3R = 0$$



$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad S + X_E + F_H \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

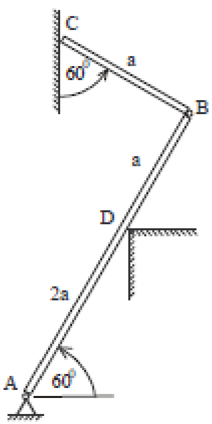
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad F_A + Y_E - G - Q - F_H \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A = 0; \quad -Y_E 2R \frac{\sqrt{2}}{2} + X_E 2R \frac{\sqrt{2}}{2} + G3R \frac{\sqrt{2}}{2} + F_H 3R + Q6R \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\underline{F_A = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}Q}, \quad \underline{F_B = \frac{3}{2}Q + \frac{3}{2}G},$$

$$\underline{X_E = -3G - \frac{3}{2}Q}, \quad \underline{Y_E = \frac{3}{2}Q}, \quad \underline{S = \frac{5}{2}G + \frac{3}{2}Q}$$

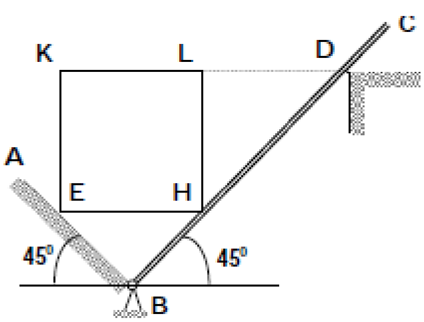
$$\underline{F_A > 0 \quad \Rightarrow \quad Q < 3G}$$



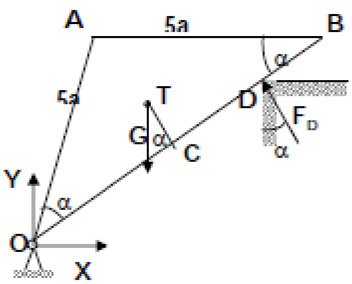
2. Homogena trougaona plo~a OAB, stranica OA=AB=5a, OB=6a, te`ine G, zglobno je vezana za pod u temenu O, na rastojanju OD=11a/3, slobodno se oslanja na ivicu glatkog zida, tako da stranica AB plo~e zauzima horizontalan polo`aj. Odrediti sve reakcije veza u ta~kama O i D.

3. Homogena greda $\overline{AB}$ du`ine 3a te`ine 3G, slobodno se oslanja u ta~ki D na nepokretni glatki zid. Krajem B greda $\overline{AB}$ zglobom je vezana za {tap $\overline{BC}$ du`ine a i te`ine G. Krajem C {tap $\overline{BC}$ se slobodno oslanja na glatki vertikalni zid. Za zadati ravnote`ni polo`aj sistema, odrediti reakcije veza u zglobovima A i B, i sile u ta~kama oslanjanja {tapova C i D.

4. Homogena kvadratna plo~a, stranice a, te`ine G, oslanja se na glatku strmu ravan AB i homogeni glatki {tap BC, te`ine G, du`ine $2\sqrt{2}a$. [tap BC je vezan nepokretnim le`i{tem za podlogu i oslonjen je na ivicu D zida, koja se nalazi na istoj visini sa horizontalnom stranicom KL plo~e. Ako u polo`aju ravnote`e, koji je prikazan na slici, strma ravan i {tap zaklapaju jednake uglove (po 45^0) sa horizontalom odrediti sve reakcije veza.



2. Zadatak:



$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 0; \quad X_0 - F_D \sin\alpha = 0; \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

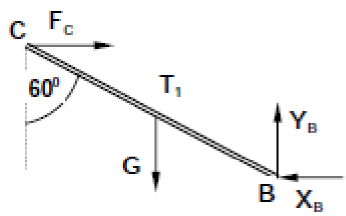
$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 0; \quad Y_0 - G + F_D \cos\alpha = 0; \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} M_O^{F_i} = 0; \quad G \cdot 3a \cdot \cos\alpha - G \cdot \frac{4}{3} a \cdot \sin\alpha - F_D \frac{11}{3} a = 0$$

$$\overline{AC} = 4a, \quad X_0 = F_D \sin\alpha, \quad Y_0 = G - F_D \cos\alpha$$

$$\underline{\underline{F_D = \frac{G}{5}}}, \quad \underline{\underline{X_0 = \frac{4}{25}G}}, \quad \underline{\underline{Y_0 = \frac{22}{25}G}}$$

3. Zadatak:

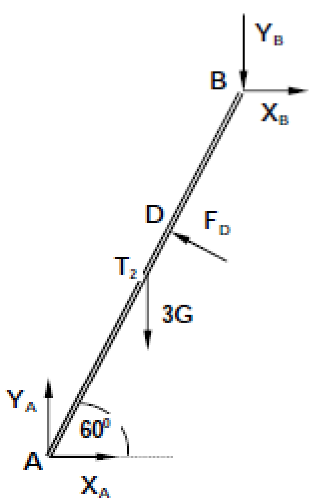


$$\sum_{i=1}^{4} X_i = 0; \quad F_C - X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0; \quad Y_B - G = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_B^{F_i} = 0; \quad G\frac{a}{2}\sin 60^0 - F_C a \cos 60^0 = 0;$$

$$\underline{\underline{X_B = G\frac{\sqrt{3}}{2}}}, \quad \underline{\underline{F_C = G\frac{\sqrt{3}}{2}}}, \quad \underline{\underline{Y_B = G}};$$



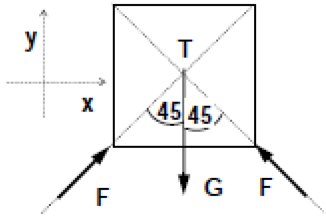
$$\sum_{i=1}^{4} X_i = 0; \quad X_A + X_B - F_D \cos 30^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0; \quad Y_A - Y_B - 3G + F_D \sin 30^0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_B^{F_i} = 0; \quad X_B 3a \sin 60^0 + Y_B 3a \cos 60^0 + 3G\frac{3a}{2}\cos 60^0 - F_D 2a = 0;$$

$$\underline{\underline{F_D = 3G}}, \quad \underline{\underline{X_A = \sqrt{3}G}}, \quad \underline{\underline{Y_A = \frac{5}{2}G}};$$

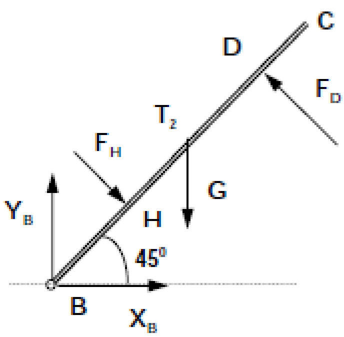
4. Zadatak:



$$F_E \sin 45^0 - F_H \sin 45^0 = 0 \qquad\qquad F_E = F_H = F$$

$$2F\cos 45^0 = G$$

$$\underline{F_E = F_H = \frac{\sqrt{2}}{2}G}$$



$$\overline{BH} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\,,\ \overline{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a\,,\ \overline{BT_2} = a\sqrt{2}$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = 0; \quad X_B - F_D\frac{\sqrt{2}}{2} + F_H\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

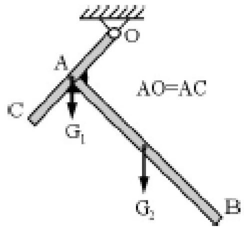
$$\sum_{i=1}^{5} Y_i = 0; \quad Y_B + F_D\frac{\sqrt{2}}{2} - F_H\frac{\sqrt{2}}{2} - G = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} M_B^{F_i} = 0; \quad F_H\frac{\sqrt{2}}{2}a + G\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} - F_D\frac{3\sqrt{2}}{2}a = 0$$

$$\underline{F_D = \frac{\sqrt{2}}{2}G} \qquad \underline{X_B = 0}, \qquad \underline{Y_B = G}$$

__Primer 1.__ Dva štapa dužine $l_1 = \overline{OC}$, težine G_1 i l_2 težine G_2, kruto su spojena u tački A ($\overline{AB} \perp \overline{OC}$). Za slučaj ravnotežnog stanja odrediti ugao φ.

Rešenje:



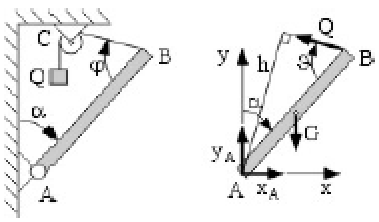
$$\sum M_{F_i}^{O} = 0$$

$$-G_1\frac{l_1}{2}\cos\varphi + G_2\left(\frac{l_2}{2}\sin\varphi - \frac{l_1}{2}\cos\varphi\right) = 0$$

$$tg\varphi = \frac{l_1(G_1+G_2)}{l_2 G_2}$$

__Primer 2__ Homogeni štap AB, težine G i dužine $l = \overline{AB}$, zglobno je vezan u tački A. Za drugi kraj štapa vezan je, preko malog nepomičnog kotura C, teret Q. Za ravnotežno stanje štapa odrediti reakcije veze u tački A i ugao φ.

Rešenje:



1) $\sum F_{ix} = 0$; $X_A - Q\sin(\varphi+\alpha) = 0$

2) $\sum F_{iy} = 0$; $Y_A - G - Q\cos(\varphi+\alpha) = 0$

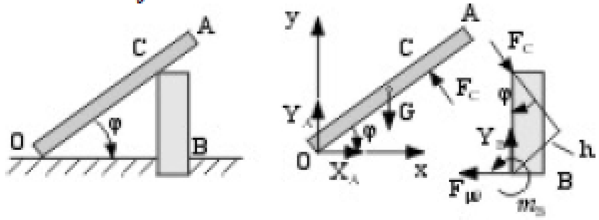
3) $\sum M_{F_i}^{B} = 0$; $Qh - \dfrac{Gl\sin\alpha}{2} = 0$

$h = l\sin\varphi$ 3) $\rightarrow$ $\varphi_1 = \alpha$; 2) $\rightarrow$ $Y_A = G + Q\cos 2\alpha$; 1) $\rightarrow$ $X_A = Q\sin 2\alpha$

3) $\rightarrow$ $\varphi_2 = 180^0 - \alpha$; 2) $\rightarrow$ $Y_A = G - Q$; 1) $\rightarrow$ $X_A = 0$

__Primer 3__ Homogeni štap OA, težine G i dužine $l = \overline{OA}$, oslanja se u tački O na hrapav horizontalni pod a u tački C na ivicu glatkog stuba BC, zanemarljive težine i visine H. Za ravnotežni položaj naći koeficijent trenja μ i reakcije oslonaca u tačkama O, B i C.

Rešenje:



1) $\sum F_{ix}=0\,;\,F_{\mu O}-F_C\sin\varphi=0$ 2) $\sum F_{iy}=0\,;\;\;Y_O-G+F_C\cos\varphi=0$

3) $\sum M_{F_i}^{O}=0\,;\;\dfrac{Gl\cos\varphi}{2}-F_C\dfrac{H}{\sin\varphi}=0$ 4) $F_{\mu_O(\max)}=\mu Y_O$

5) $\sum F_{ix}=0\,;\;F_C\sin\varphi-X_B=0$ 6) $\sum F_{iy}=0\,;\;Y_B-F_C\cos\varphi=0$

$h=H\sin\varphi$; 7) $\sum M_{F_i}^{B}=0\,;\;F_C h-m_B=0$

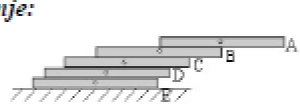
3) $\rightarrow\;F_C=\dfrac{Gl\sin 2\varphi}{4H}$; 2) $\rightarrow\;Y_O=G\left(1-\dfrac{l}{4H}\sin 2\varphi\cos\varphi\right)$

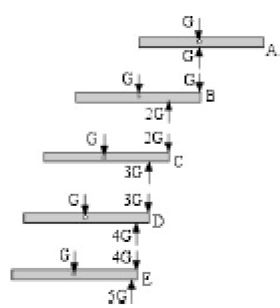
1) i 4) $\rightarrow\;\mu=\dfrac{l\sin 2\varphi\sin\varphi}{4H-l\sin 2\varphi\cos\varphi}$; 5) $\rightarrow\;X_B=\dfrac{Gl\sin 2\varphi\sin\varphi}{4H}$

6) $\rightarrow\;Y_B=\dfrac{Gl\sin 2\varphi\cos\varphi}{4H}$; 7) $\rightarrow\;m_B=\dfrac{Gl\sin 2\varphi\sin\varphi}{4}$

Primer 4 Nekoliko homogenih pločica jednake težine (G), i jednake dužine 2l, položene su jedna na drugu tako, da je svaka od njih prepuštena za izvesnu dužinu nad predhodnom. Odrediti granične dužine tih prepusta, pri kojima će pločice stajati u ravnoteži. (Pri rešavanju zadatka treba sabirati postupno težine pločica počinjući odozgo.

Rešenje:





$\sum M_{F_i}^{C}=0\,;\;G\left(l-\overline{CB}\right)-G\overline{CB}=0$ $\overline{AB}=\dfrac{l}{2}$

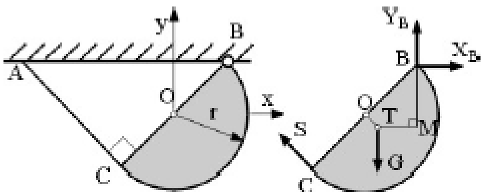
$\overline{CB}=\dfrac{l}{2}$

$\sum M_{F_i}^{D}=0\,;\;G\left(l-\overline{CD}\right)-2G\overline{CD}=0$ $\overline{CD}=\dfrac{l}{3}$

$\sum M_{F_i}^{E}=0\,;\;G\left(l-\overline{DE}\right)-3G\overline{DE}=0$ $\overline{DE}=\dfrac{l}{4}$

Primer5 Polukružna ploča težine G i poluprečnika r, zglobno je vezana u tački B a u tački C vezana je koncem za tačku A. Odrediti reakcije veza.

Rešenje:



$$1)\ \sum F_{ix}=0;\ X_B-S\cos 45^0=0$$

$$2)\ \sum F_{iy}=0;\ S\sin 45^0-G+Y_B=0$$

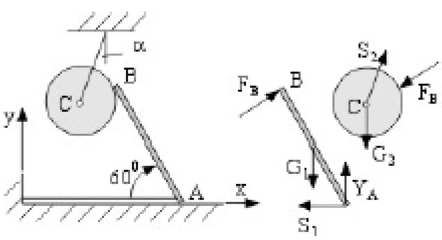
$$3)\ \sum M_{F_i}^{B}=0;\ 2Sr-Gh=0$$

$$h=\overline{TM}=\frac{\sqrt{2}}{2}r\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)$$

$$3)\ \rightarrow\ S=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{4}{3\pi}\right);\ 2)\ \rightarrow\ Y_B=G\frac{9\pi+4}{12\pi};\ 1)\ \rightarrow\ X_B=G\frac{3\pi-4}{12\pi}$$

Primer 6 Štap AB, težine $G_1=400\,N$ i dužine l, krajem A se oslanja na glatki horizontalni pod i vezan je horizontalnim koncem za zid, dok se krajem B oslanja na kuglu težine $G_2=100\,N$, poluprečnika R, koja je vezana za plafon užetom nagnutim za ugao α prema vertikali. U ravnotežnom položaju pravac štapa se poklapa sa pravcem tangente na kuglu, dok sa pravcem poda zaklapa ugao 60^0. Odrediti reakcije veza, uzajamni pritisak kugle i štapa i ugao α koji uže gradi sa vertikalom.

Rešenje:



$$1)\ \sum F_{ix}=0;\ F_B\sin 60^0-S_1=0$$

$$2)\ \sum F_{iy}=0;\ F_B\cos 60^0-G_1+Y_A=0$$

$$3)\ \sum M_{F_i}^{A}=0;\ F_B l-G_1\frac{l}{2}\cos 60^0=0$$

$$4)\ \sum F_{ix}=0;\ S_2\sin\alpha-F_B\sin 60^0=0$$

$$5)\ \sum F_{iy}=0;\ S_2\cos\alpha-F_B\cos 60^0=0$$

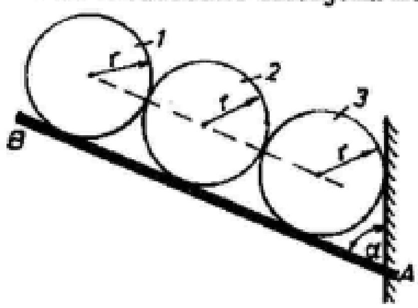
$$3)\ \rightarrow\ F_B=\frac{G_1}{4}=100\,N;\ 2)\ \rightarrow\ Y_A=\frac{7}{8}G_1=350\,N;\ 1)\ \rightarrow\ S_1=\frac{\sqrt{3}}{8}G_1=50\sqrt{3}\ N$$

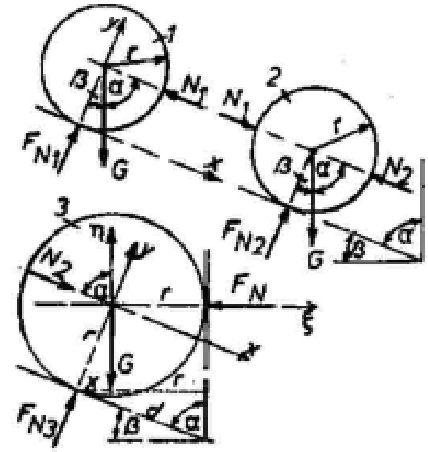
$$5)\ \rightarrow\ \alpha=30^0;\ 4)\ \rightarrow\ S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}G_1=100\sqrt{3}\ N$$

Tri međusobno oslonjena homogena jednaka cilindra nalaze se na homogenoj konzoli AB, pri čemu se treći cilindar oslanja i na glatki vertikalni zid; tgα=4/3. Svaki cilindar ima težinu G i poluprečnik r. Konzola ima težinu Q=G i dužinu AB=8r.

Odrediti moment uklještenja u A .

Trenje zanemariti.





Rešenje.

Cilindar 1.

$\sum Y_i = 0;\ F_{N1} = G\sin\alpha;$

$\sum X_i = 0;\ N_1 = G\cos\alpha.$

Cilindar 2. $\sum Y_i = 0;\ F_{N2} = G\sin\alpha;$

$\sum X_i = 0;\ N_2 = 2G\cos\alpha.$

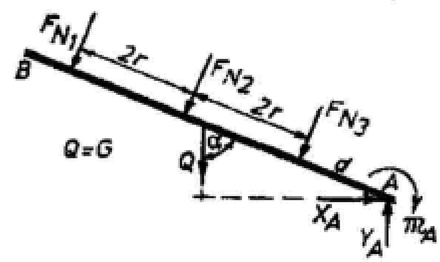
Cilindar 3. $d = r\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$$F_{N3} = G\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

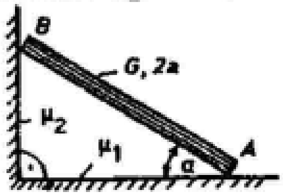
Konzola AB.

$$\sum M_A = 0;\quad \mathfrak{M}_A = Gr\frac{3+3\cos\alpha+10\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\mathfrak{M}_A = \frac{31}{2}Gr = 15{,}5Gr.$$



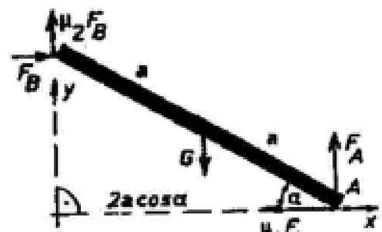
Homogeni štap AB, dužine 2a i težine G, oslanja se svojim krajevima na hrapavi horizontalni pod i hrapavi vertikalni zid.



Odrediti veličinu nagibnog ugla α ($\alpha=\alpha_{min}$) za ravnotežno stanje štapa, ako su koeficijenti trenja klizanja: štap–pod μ_1, štap–zid μ_2. Koliki je taj ugao α ako je $\mu_1=2\mu_2=2\mu$? Koliki treba da bude koeficijent trenja μ da bi štap mogao da bude u ravnoteži i pri $\alpha=\pi/6$?

Rešenje.

$$F_A=\frac{G}{1+\mu_1\mu_2};\quad F_B=\frac{\mu_1 G}{1+\mu_1\mu_2}.\quad 3)\ \sum M_A^{\bar{F}_i}=0;$$

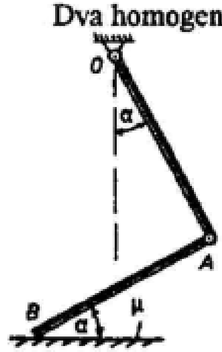


$$2aF_B\sin\alpha+\mu_2 2aF_B\cos\alpha=aG\cos\alpha;$$

$$tg\alpha=\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1};\quad tg\alpha=\frac{1-2\mu^2}{4\mu}.$$

$$\alpha=\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1-2\mu^2}{4\mu}\ \Rightarrow\ \mu=0,3355.$$

Dva homogena štapa OA i AB, jednakih težina i dužina, zglobno su spojeni u tački A.



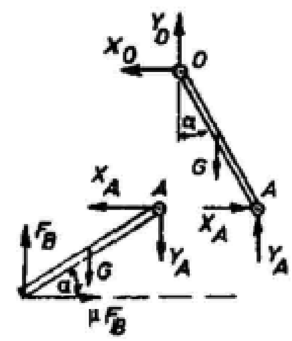
Drugi kraj štapa AB oslanja se na hrapavu horizontalnu ravan, koeficijenta trenja klizanja μ.
U položaju ravnoteže štapovi zaklapaju sa horizontalom, odnosno vertikalom, ugao α.

Naći statički koeficijent trenja μ u funkciji α. Izračunati reakcije u O i B i silu međusobnog dejstva u zglobu A.

Rešenje. Štap AB. $1)\ \sum X_i=0\ ....\ X_A=\mu F_B.$

$$2)\ \sum Y_i=0\ ....\ Y_A=F_B-G.$$

$$3)\ \sum M_A^{\bar{F}_i}=0;\ 2F_B(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)=G\cos\alpha.$$



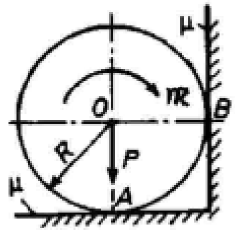
Štap OA. $X_A=X_O;\ Y_A=G-Y_O.$

$$\sum M_O^{\bar{F}_i}=0;\ 2X_A\cos\alpha+2Y_A\sin\alpha=G\sin\alpha.$$

$$\mu=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}=\frac{2}{ctg\alpha+3tg\alpha}.$$

$$F_B=\frac{G}{2}(\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha);\quad X_A=\frac{G}{2}\sin 2\alpha;\quad Y_A=-\frac{G}{2}\cos 2\alpha.$$

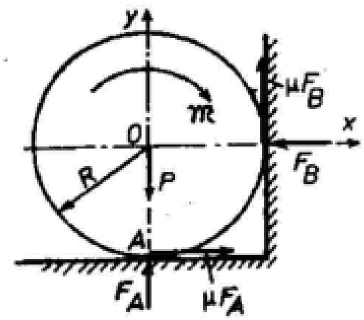
Homogeni disk (cilindar), težine P i poluprečnika R, leži na horizontalnoj hrapavoj ravni i oslanja se na vertikalni hrapav zid. Na disk deluje spreg momenta $\mathfrak{M}$. Koeficijent trenja klizanja između diska i ravni i diska i zida je μ.



Odrediti moment $\mathfrak{M}$ za ravnotežno stanje u funkciji P, R i μ.

Rešenje.

Za granično stanje mirovanja diska sledi:



$1)\ \sum M_O = 0;\ \ \mathfrak{M} = \mu R(F_A + F_B);$

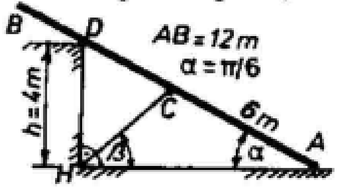
$2)\ \sum X_i = 0;\ \ F_B = \mu F_A;$

$3)\ \sum Y_i = 0;\ \ F_A + \mu F_B = P.$

$$F_A = \frac{P}{1+\mu^2};\ \ F_B = \frac{\mu P}{1+\mu^2};\ \ \mathfrak{M} = \frac{\mu PR(1+\mu)}{1+\mu^2}.$$

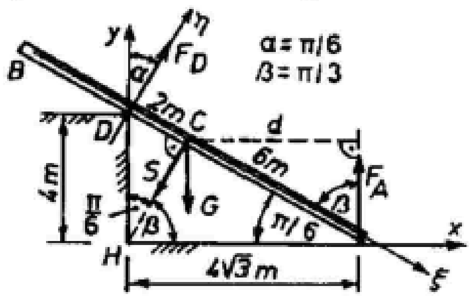
Da bi disk ostao u miru mora biti zadovoljena nejednačina $\mathfrak{M} < \dfrac{\mu PR(1+\mu)}{1+\mu^2}$.

Homogeni štap AB, dužine AB=12m i težine G, oslanja se krajem A na glatki horizontalni pod pod uglom $\alpha=\pi/6$, a u tački D na vertikalni glatki zid DH, visine h=4m. Pri tome je sredina C štapa vezana pomoću lakog užeta CH za podnožje H. Štap i uže leže u jednoj, vertikalnoj ravni.



Naći silu S u užetu i otpore oslonaca u funkciji težine G.

Rešenje. $\Delta DHA:\ HA = 4\sqrt{3}\,m;\ DA = 8\,m.$



$\Delta HCA:$ cosinus teorema, $CH = 2\sqrt{3}\,m.$

Sinusna teorema daje,

$$\frac{6}{\sin\beta} = \frac{CH}{\sin(\pi/6)};\ \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Zaključak: uže CH (i sila u njemu) je normalno na štap.

$\sum M_C = 0;\ F_D \cdot 2 = F_A \cdot d. \qquad 2F_D = 3\sqrt{3}F_A\ \ldots.(1)$

$$\sum F_{i\xi} = 0\ \Rightarrow\ F_A = G.\quad F_D = \frac{3\sqrt{3}}{2}G.\quad \sum F_{i\eta} = 0\ \Rightarrow\ S = F_D = \frac{3\sqrt{3}}{2}G.$$