ORT – ZADACI

BULOVA ALGEBRA

Zadatak 1. Uprostiti izraz $ab + a\bar{b}c + bc$.

Rešenje:

$$ab + a\bar{b}c + bc = a(b + \bar{b}c) + bc =$$
$$= a(b + \bar{b})(b + c) + bc =$$
$$= a(b + c) + bc =$$
$$= ab + ac + bc.$$

Zadatak 2. Uprostiti izraz $a\bar{b} + c + (\bar{a} + b)\bar{c}$.

Rešenje:

$$a\bar{b} + c + (\bar{a} + b)\bar{c} = a\bar{b} + c + \bar{a}\bar{c} + b\bar{c} =$$
$$= a\bar{b} + (c + \bar{a})(c + \bar{c}) + b\bar{c} =$$
$$= a\bar{b} + c + \bar{a} + b\bar{c} = \bar{a} + a\bar{b} + c + b\bar{c} =$$
$$= (\bar{a} + a)(\bar{a} + \bar{b}) + (c + b)(c + \bar{c}) =$$
$$= \bar{a} + \bar{b} + c + b = \bar{a} + c + \bar{b} + b = \bar{a} + c + 1 = 1\,.$$

Zadatak 3. Dokazati jednakost

$$(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a}) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + a).$$

Rešenje:

$$(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a}) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + a)$$
$$(ab + a\bar{c} + \bar{b}\bar{c})(c + \bar{a}) = (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}c + bc)(\bar{c} + a)$$
$$abc + a\bar{c}c + c\bar{b}\bar{c} + a\bar{a}c + a\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}c\bar{c} + bc\bar{c} + \bar{a}\bar{b}a + \bar{a}ca + bca$$
$$abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + abc.$$

Zadatak 4. Ako je $a\bar{b} + \bar{a}\, b = c$ dokazati da je $a\, \bar{c} + \bar{a}\, c = b$.

Rešenje:

$$a\, \overline{(a\bar{b} + \bar{a}b)} + \bar{a}\, (a\bar{b} + \bar{a}\, b) = b,$$

$$a \cdot \overline{a\bar{b}} \cdot \overline{\bar{a}b} + \bar{a}a\bar{b} + \bar{a}\bar{a}b = b,$$

$$a(\bar{a} + b)(a + \bar{b}\,) + \bar{a}\, b = b,$$

$$a\big(\bar{a}a + \bar{a}\bar{b} + ab + b\bar{b}\big) + \bar{a}b = b$$

$$a(ab + \bar{a}\, \bar{b}\,) + \bar{a}\, b = b,$$

$$a\bar{a}\bar{b} + aab + \bar{a}b = b$$

$$ab + \bar{a}\, b = b,$$

$$b(a + \bar{a}) = b,$$

$$b = b.$$

Zadatak 5. Uprostiti izraz: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2\overline{x_3} + x_1x_3)(x_1 + \overline{x_2}x_3) + x_2x_3$.

Rešenje:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2\overline{x_3} + x_1x_3)(x_1 + \overline{x_2}x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_3 + x_1\overline{x_2}x_3) + x_2x_3$$

$$= x_1(x_1(x_3 + x_2\overline{x_3}) + x_1\overline{x_2}x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_1(x_3 + x_2)(x_3 + \overline{x_3}) + x_1\overline{x_2}x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_1(x_3 + x_2) + x_1\overline{x_2}x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1x_1(x_3 + x_2 + \overline{x_2}x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_3 + (x_2 + \overline{x_2})(x_2 + x_3)) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_3 + x_2 + x_3) + x_2x_3 =$$

$$= x_1(x_3 + x_2) + x_2x_3 =$$

$$= x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3.$$

Zadatak 6. Uprostiti izraz: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(\, x_1x_2 + x_3\,)}\, \overline{(\, \overline{x_1} + x_2x_3\,)} + x_2\overline{x_3}$.

Rešenje:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(\, x_1x_2 + x_3\,)}\, \overline{(\, \overline{x_1} + x_2x_3\,)} + x_2\overline{x_3} =$$

$$= \overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{x_2x_3} + x_2\overline{x_3} =$$

$$= (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot \overline{x_3} \cdot x_1 \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}) + x_2\overline{x_3} =$$

$$= (\overline{x_1}\, \overline{x_3}x_1 + \overline{x_2}\, \overline{x_3}x_1) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}) + x_2\overline{x_3} =$$

$$= x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\cdot(\overline{x_2}+\overline{x_3}) + x_2\overline{x_3} = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} =$$
$$= \overline{x_3}(x_1\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_3}(x_1 + x_2)(\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_3}(x_1 + x_2) =$$
$$= x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_3}$$

Zadatak 7. Uprostiti izraz: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2} + \overline{(\overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_4)x_4 + x_3} + \overline{x_3 + x_4}$.

Rešenje:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2} + \overline{(\overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_4)x_4 + x_3} + \overline{x_3 + x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_3}x_4 + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4(\overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}) + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4(\overline{x_2} + \overline{x_3})(x_3 + \overline{x_3}) + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4(\overline{x_2} + \overline{x_3}) + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{\overline{x_2}x_4 + \overline{x_3}x_4 + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{\overline{x_2}x_4 + (\overline{x_3} + x_3)(x_4 + x_3)} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{\overline{x_2}x_4 + x_4 + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4(\overline{x_2} + 1) + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4 + x_3} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_3}\cdot\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\,\overline{x_4}.$$

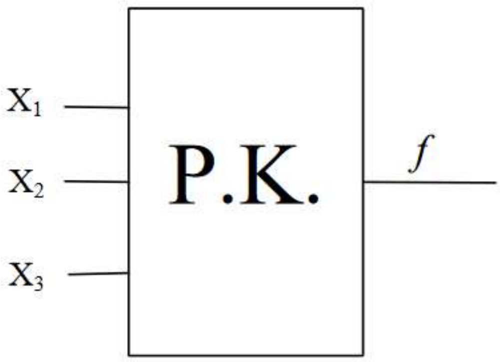
Zadatak 8. Uprostiti izraz: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} + x_3 + (\overline{x_1} + x_2)\overline{x_3}$.

Rešenje:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} + x_3 + (\overline{x_1} + x_2)\overline{x_3} =$$
$$= x_1\overline{x_2} + x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} =$$
$$= x_1\overline{x_2} + (x_3 + \overline{x_1})(x_3 + \overline{x_3}) + x_2\overline{x_3} =$$
$$= x_1\overline{x_2} + x_3 + \overline{x_1} + x_2\overline{x_3} =$$
$$= (x_1 + \overline{x_1})(\overline{x_2} + \overline{x_1}) + (x_3 + x_2)(x_3 + \overline{x_3}) =$$
$$= \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_3 + x_2 =$$
$$= 1 + \overline{x_1} + x_3 = 1.$$

PREKIDAČKE FUNKCIJE

Zadatak 1. Prekidačka funkcija od 3 promenljive $f(x_1, x_2, x_3)$ zadata je skupom decimalnih indeksa $f(1) = \{0,2,5,7\}$. Predstaviti zadatu funkciju tablično.



Rešenje:

2^n – broj različitih binarnih vektora koji se mogu pojaviti na ulazu prekidačkog kola.

$n = 3 \rightarrow 2^3 = 8$ – broj različitih binarnih vektora.

i	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	000	1
1	001	0
2	010	1
3	011	0
4	100	0
5	101	1
6	110	0
7	111	1

Tablica 2. *Kombinaciona tablica za Zadatak 1*

Poslednja kolona Tablice 2 ima 2^n ćelija. U svaku se može upisati 0 ili 1. Odatle sledi da je broj potpuno definisanih prekidačkih funkcija od *n* promenljivih određen sa 2^{2^n}. Tablica 3 pokazuje kako taj broj brzo raste sa porastom *n*.

n	1	2	3	4	5
Broj funkcija	4	16	256	65536	4294967296

Tablica 3. *Broj potpuno definisanih prekidačkih funkcija*

Zadatak 2. Prekidačka funkcija od 3 promenljive $f(x_1, x_2, x_3)$ zadata je skupom decimalnih indeksa $f(1) = \{0,4,7\}$ i $f(b) = \{1,5\}$. Predestaviti zadatu funkciju tablično.

Rešenje:

$n = 3 \rightarrow 2^3 = 8$ – broj različitih binarnih vektora

$f(0) = \{2,3,6\}$

i	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	000	1
1	001	b
2	010	0
3	011	0
4	100	1
5	101	b
6	110	0
7	111	1

Tablica 4. *Kombinaciona tablica za Zadatak 2*

Zadatak 3. Prekidačka funkcija od 4 promenljive $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadata je skupom decimalnih indeksa $f(0) = \{1,5,8,10,12,15\}$ i $f(b) = \{2,9,13\}$. Predstaviti zadatu funkciju tablično.

Rešenje:

$n = 4 \rightarrow 2^4 = 16$ – broj različitih binarnih vektora

$f(1) = \{0,3,4,6,7,11,14\}$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_3x_4}$	$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}$
0	0000	1
1	0001	0
2	0010	b
3	0011	1
4	0100	1
5	0101	0
6	0110	1
7	0111	1
8	1000	0
9	1001	b
10	1010	0
11	1011	1
12	1100	0
13	1101	b
14	1110	1
15	1111	0

Tablica 5. *Kombinaciona tablica za Zadatak 3*

Zadatak 4. Prekidačku funkciju zadatu sa $f(1) = \{1,2,4,7\}$ predstaviti u vidu SDNF i SKNF.

Rešenje:

$f_{SDNF} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2x_3$

$\Rightarrow f(0) = \{0,3,5,6\}$

$f_{SKNF} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)$

Zadatak 5. Zadata je funkcija f nekom svojom DNF. Svakom elementarnom proizvodu dodeliti odgovarajuće kubove, pa na osnovu toga naći skup $f(1)$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)_{DNF} = \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} + x_3 + x_1 + \overline{x_2}\ \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Rešenje:

$\overline{x_1} x_2 \overline{x_4}$	x_3	x_1	$\overline{x_2}\ \overline{x_3}$	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$r=1$	$r=3$	$r=3$	$r=2$	$r=0$
01X0	XX1X	1XXX	X00X	1111
0100	0010	1000	0000	
0110	0011	1001	0001	
	0110	1010	1000	
	0111	1011	1001	
	1010	1100		
	1011	1101		
	1110	1110		
	1111	1111		

$\Rightarrow f(1) = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,1314,15\}$

$\Rightarrow f(0) = \{5\}$

Zadatak 6. Zadata je funkcija *f* nekom svojom KNF. Svakom elementarnom zbiru dodeliti odgovarajuće kubove, pa na osnovu toga naći skup $f(0)$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)_{KNF} = (x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_4})$$

Rešenje:

$x_2 + \overline{x_3}$	$\overline{x_1} + \overline{x_4}$
r=2	*r*=2
X01X	1XX1
0010	1001
0011	1011
1010	1101
1011	1111

$\Rightarrow f(0) = \{2,3,9,10,11,13,15\}$

$\Rightarrow f(1) = \{0,1,4,5,6,7,8,12,14\}$

Zadatak 7. Zadata je funkcija f nekom svojom DNF. Metodom proširivanja naći SDNF te funkcije.

$$f(x_1, x_2, x_3)_{DNF} = x_1 + \overline{x_2}x_3 + x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Rešenje:

$f(x_1, x_2, x_3)_{SDNF} = x_1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \overline{x_2}x_3 + 1 \cdot 1 \cdot x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} =$

$= x_1(x_2 + \overline{x_2})(x_3 + \overline{x_3}) + (x_1 + \overline{x_1})\overline{x_2}x_3 + (x_1 + \overline{x_1})(x_2 + \overline{x_2})x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} =$

$= x_1(x_2x_3 + x_2\overline{x_3} + \overline{x_2}x_3 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}) + x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + (x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2})x_3$
$+ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} =$

$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 +$
$\overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} =$

$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$

$\Rightarrow f(1) = \{0,1,3,4,5,6,7\}$,

$\Rightarrow f(0) = \{2\}$

Zadatak 8. Zadata je funkcija f nekom svojom KNF. Metodom proširivanja naći SKNF te funkcije.

$$f(x_1, x_2, x_3)_{KNF} = x_1(x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3)$$

Rešenje:

$f(x_1, x_2, x_3)_{SKNF} = (x_1 + x_2\overline{x_2} + x_3\overline{x_3})(x_1\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3) =$

$= (x_1 + x_2\overline{x_2} + x_3)(x_1 + x_2\overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3) =$

$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot$
$\cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3)$

$\Rightarrow f(0) = \{0,1,2,3,4,5\}$

$\Rightarrow f(1) = \{6,7\}$.

KARNOOVE TABLICE

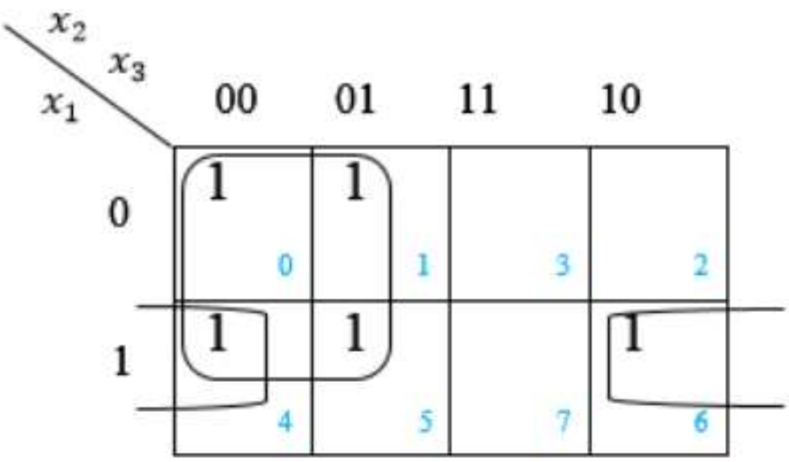
Zadatak 1. Naći pomoću Karnoovih tablica

a) Minimalnu DNF

b) Minimalnu KNF

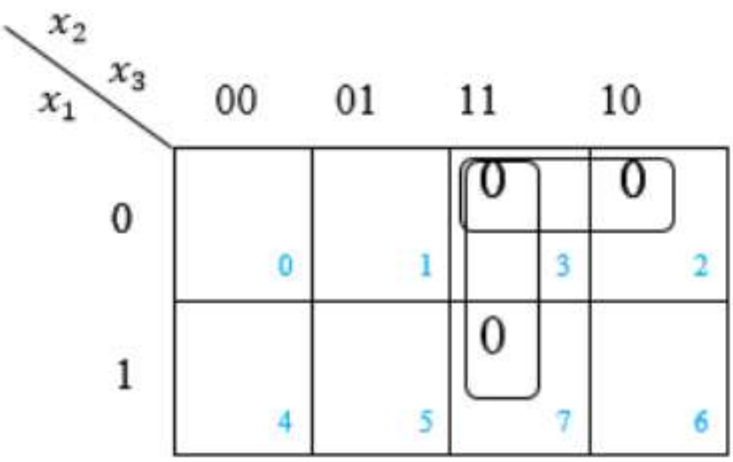
Za prekidačku funkciju $f(x_1, x_2, x_3)$ zadatu sa $f(1) = \{0,1,4,5,6\}$.

a)



$$f_{DNF\ min} = \overline{x_2} + x_1\overline{x_3}$$

b) $\rightarrow f(0) = \{2,3,7\}$



$$f_{KNF\ min} = (\overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2})$$

Zadatak 2. Naći pomoću Karnoovih tablica

a) Minimalnu DNF

b) Minimalnu KNF

Za prekidačku funkciju $f(x_1, x_2, x_3)$ zadatu sa $f(0) = \{2,3,6,7\}$.

a) $\rightarrow f(1) = \{0,1,4,5\}$

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1 0	1 1	3	2
1	1 4	1 5	7	6

$f_{DNF\ min} = \overline{x_2}$

b)

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	0	1	0 3	0 2
1	4	5	0 7	0 6

$f_{KNF\ min} = \overline{x_2}$

Zadatak 3. Naći pomoću Karnoovih tablica minimalnu DNF za prekidačku funkciju $f(x_1, x_2, x_3)$ zadatu sa $f(0) = \{0,1,4,7\}$.

$\rightarrow f(1) = \{2,3,5,6\}$

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	 0	 1	1 3	1 2
1	 4	1 5	 7	1 6

$f_{DNF\,min} = x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2 + x_2\overline{x_3}$

Zadatak 4. Koristeći Karnoove tablice odrediti bar jednu minimalnu DNF za prekidačku funkciju $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadatu sa $f(1) = \{1,4,5,6,8,12,13,15\}$.

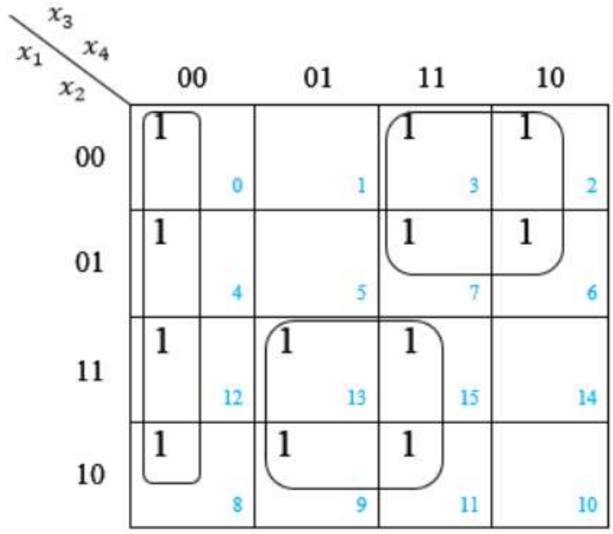
$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	 0	1 1	 3	 2
01	1 4	1 5	 7	1 6
11	1 12	1 13	1 15	 14
10	1 8	 9	 11	 10

$f_{DNF\,min} = \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2x_4$

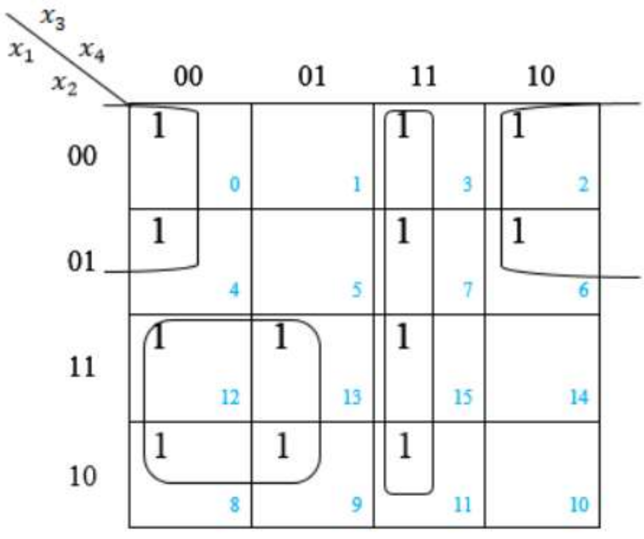
Zadatak 5. Prekidačka funkcija je zadata Karnoovom tablicom. Odrediti sve minimalne DNF te funkcije.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	$_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	1 $_{4}$	$_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	1 $_{15}$	$_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	1 $_{11}$	$_{10}$

Rešenje:



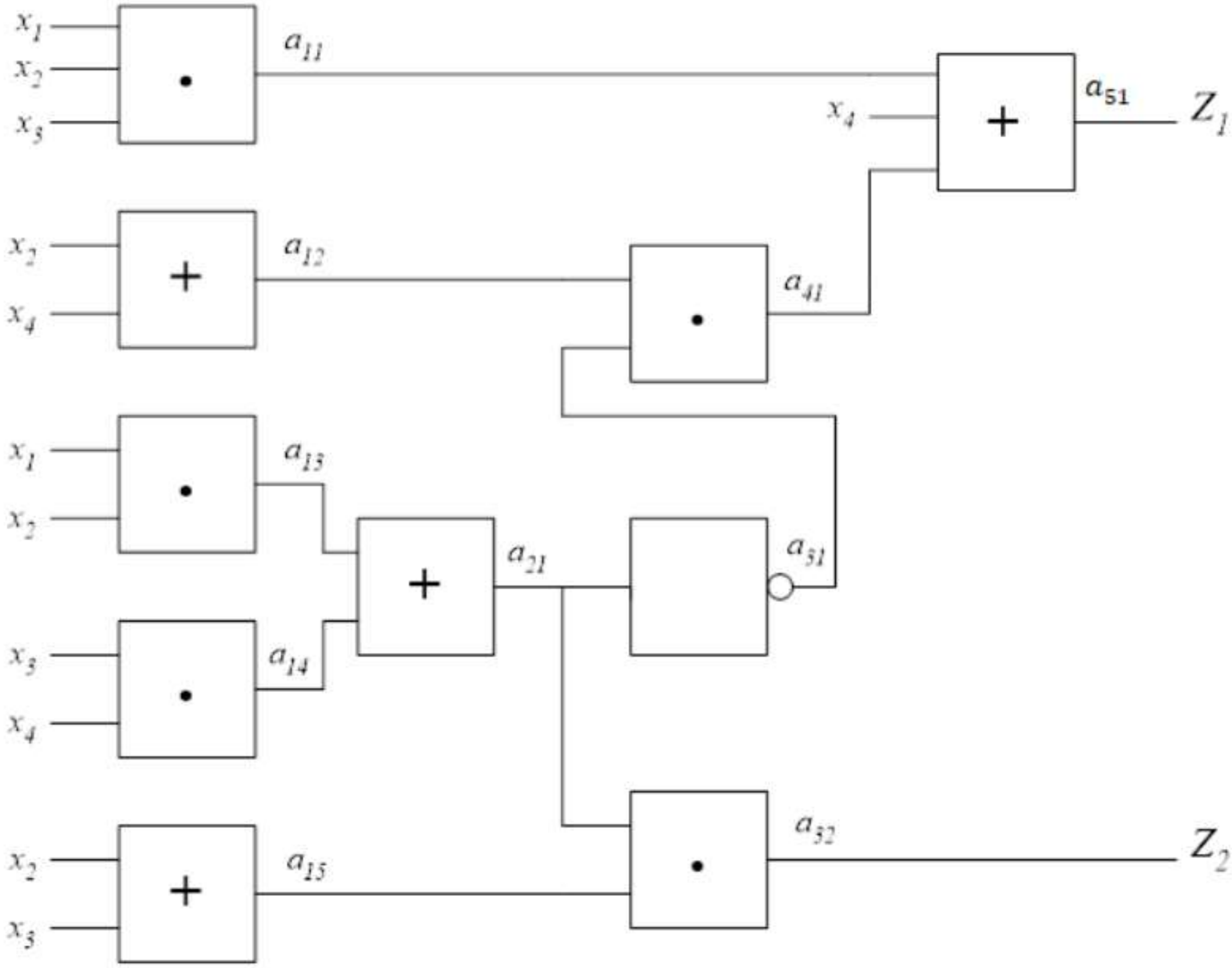
$$f_{1DNF\,min} = \overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_4 + \overline{x_1}\,x_3$$



$$f_{2DNF\,min} = \overline{x_1}\,\overline{x_4} + x_3x_4 + x_1\overline{x_3}$$

KOMBINACIONE MREŽE

Zadatak 1. Odrediti $Z_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $Z_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ za kombinacionu mrežu zadatu strukturnom šemom na slici.



Rešenje:

$a_{11} = x_1x_2x_3$

$a_{12} = x_2 + x_4$

$a_{13} = x_1x_2$

$a_{14} = x_3x_4$

$a_{15} = x_2 + x_3$

$a_{21} = a_{13} + a_{14} = x_1x_2 + x_3x_4$

$a_{31} = \overline{a_{21}} = \overline{x_1x_2 + x_3x_4} = \overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_3x_4} = (\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_3} + \overline{x_4})$

$a_{32} = a_{21} \cdot a_{15} = (x_1x_2 + x_3x_4)(\, x_2 + x_3) = x_1x_2x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_3x_4 =$

$= x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4 = x_1x_2(1{+}x_3) + x_3x_4(x_2{+}1) = x_1x_2 + x_3x_4$

$a_{41} = a_{12} \cdot a_{31} = (x_2 + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_3} + \overline{x_4}) = (x_2 + x_4)(\overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4}) =$

$= \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_2\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_2\overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_4\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_2}x_4\overline{x_4} =$

$= \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

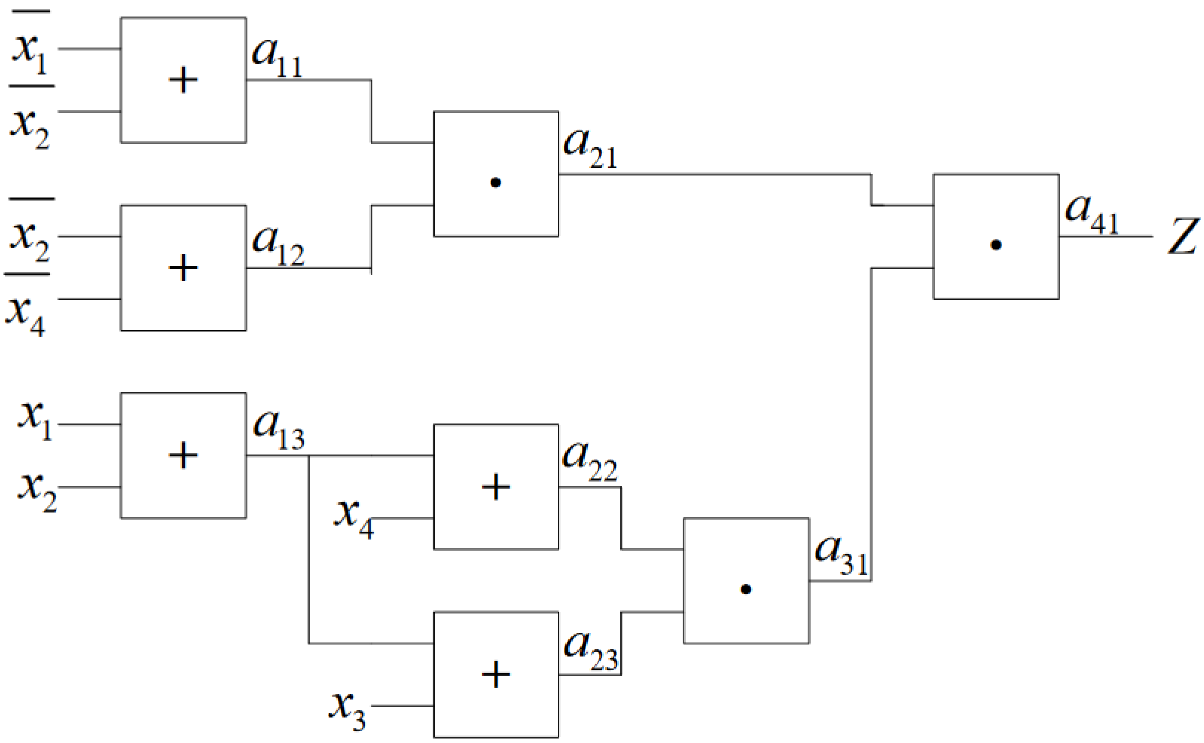
$a_{51} = a_{11} + x_4 + a_{41} = x_1x_2x_3 + x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 =$

$= x_1x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_4(1 + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}) = x_1x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_4$

$\boldsymbol{Z_1} = a_{51} = x_1x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_4$

$\boldsymbol{Z_2} = a_{32} = x_1x_2 + x_3x_4$

Zadatak 2. Odrediti $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ za kombinacionu mrežu zadatu strukturnom šemom na slici.



Rešenje:

$a_{11} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

$a_{12} = \overline{x_2} + \overline{x_4}$

$a_{13} = x_1 + x_2$

$a_{21} = a_{11} + a_{12} = (\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_4}) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_2} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} =$

$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} = \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,(\overline{x_1} + 1 + \overline{x_4}) = \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}$

$a_{22} = a_{13} + x_4 = x_1 + x_2 + x_4$

$a_{23} = a_{13} + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$

$a_{31} = a_{22} \cdot a_{23} = (x_1 + x_2 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3x_4$ (A5b)

$\boldsymbol{Z} = a_{41} = a_{21} \cdot a_{31} = (\overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2})(x_1 + x_2 + x_3x_4) =$

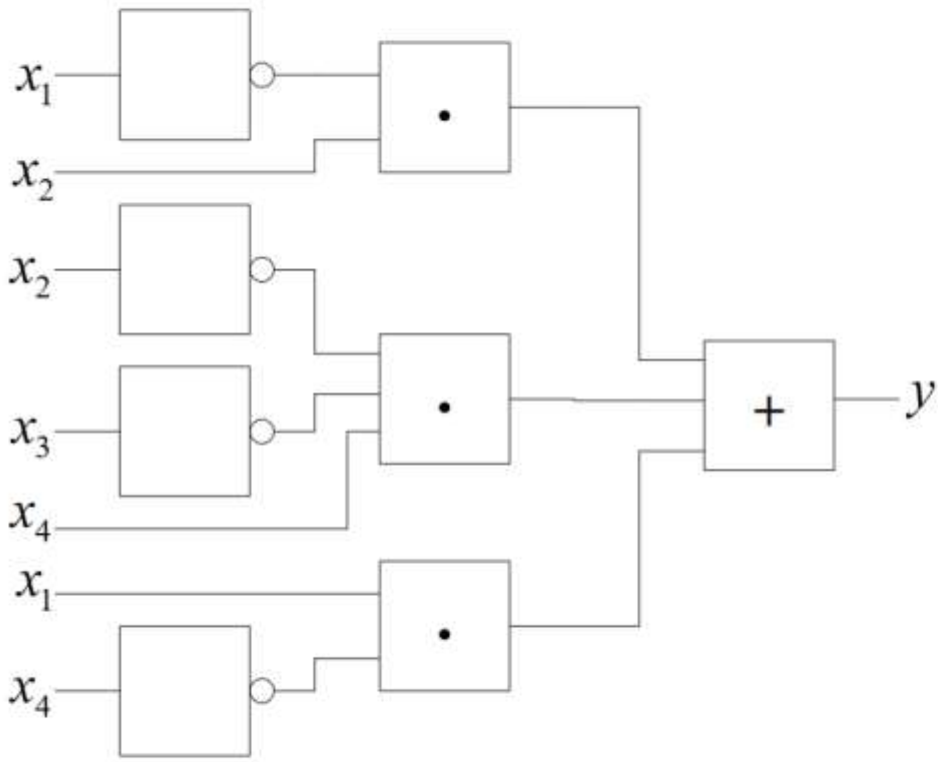
$= x_1\overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}x_3x_4\overline{x_4} + x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_2} + \overline{x_2}x_3x_4 = \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_1\overline{x_2} + \overline{x_2}x_3x_4$

Zadatak 1. Nacrtati strukturnu šemu kombinacione mreže koja realizuje sledeće prekidačke funkcije ako na raspolaganju stoje I, ILI, NE elementi bez ograničenja broja ulaza i koristeći dvoulazne I, ILI elemente.

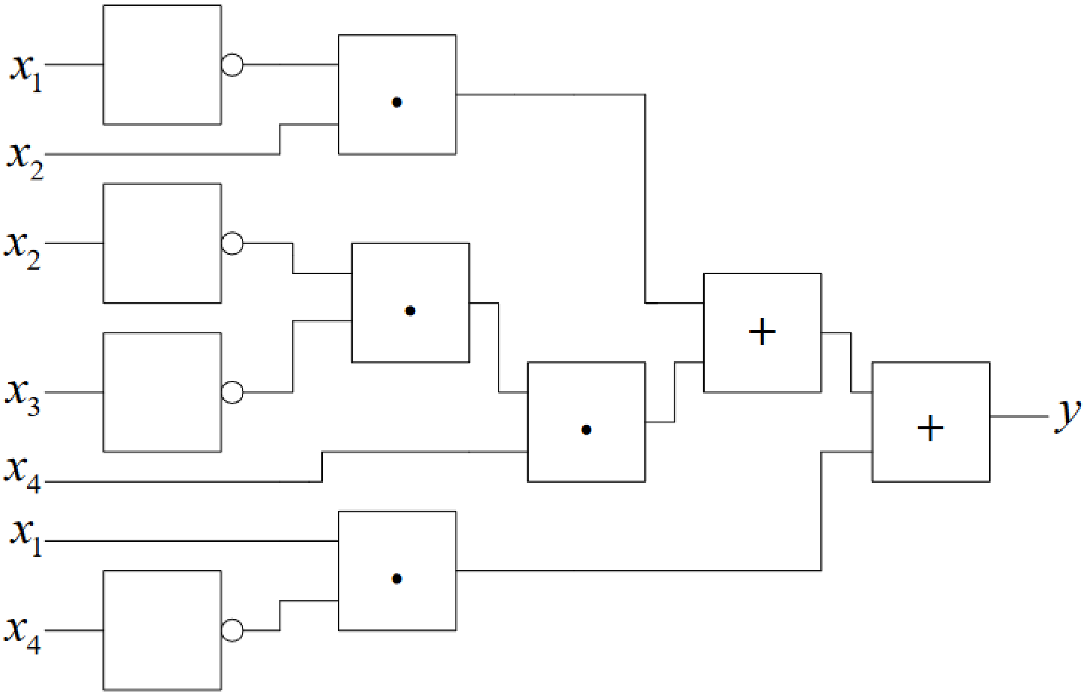
a) $y = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + x_1\overline{x_4}$

b) $y = (x_1 + x_2 + x_4)(\overline{x_2} + x_3)(x_1 + x_3)$

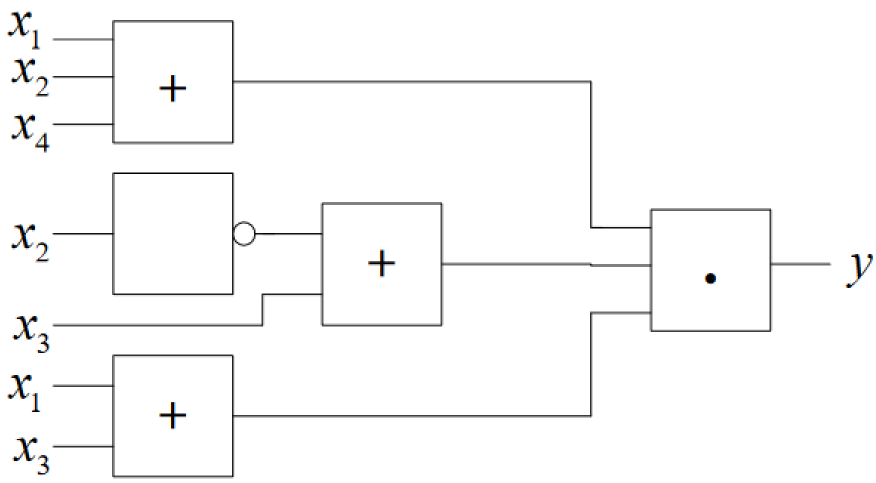
a) Bez ograničenja broja ulaza:



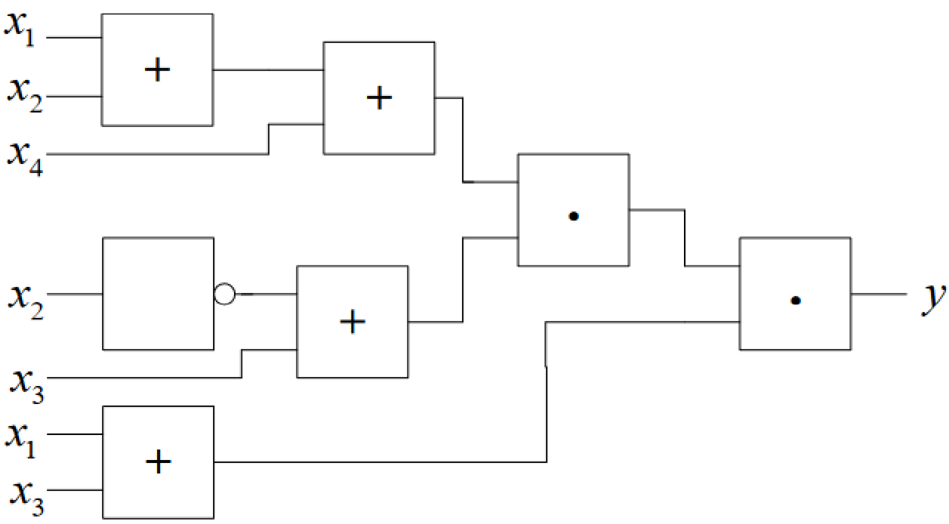
Sa dvoulaznim I, ILI elementima:



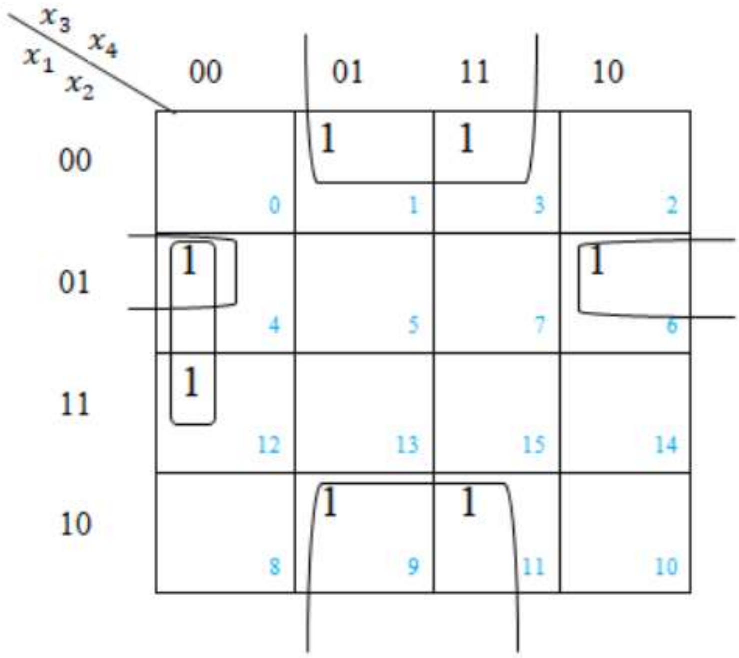
b) Bez ograničenja broja ulaza:



Sa dvoulaznim I, ILI elementima:

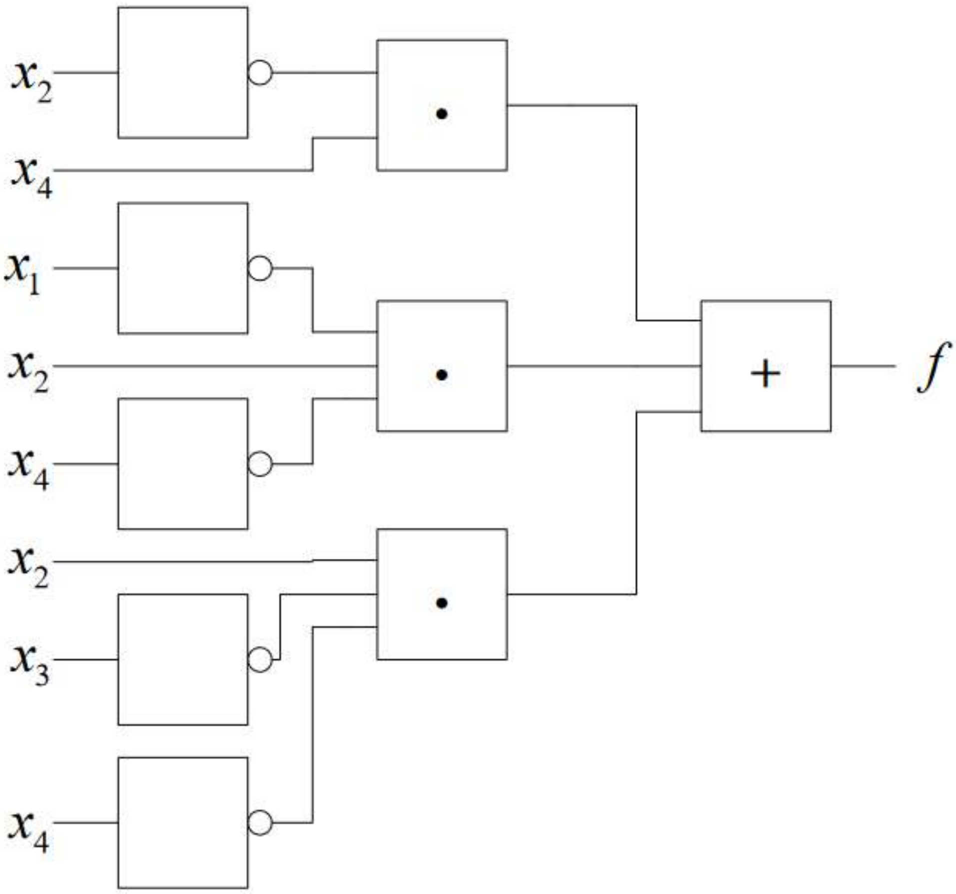


Zadatak 2. Data je prekidačka funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadata skupom indeksa $f(1) = \{1,3,4,6,9,11,12\}$. Nacrtati strukturnu šemu za funkciju *f* ako na raspolaganju stoje I, ILI, NE elementi bez ograničenja broja ulaza i koristeći dvoulazne I, ILI elemente.

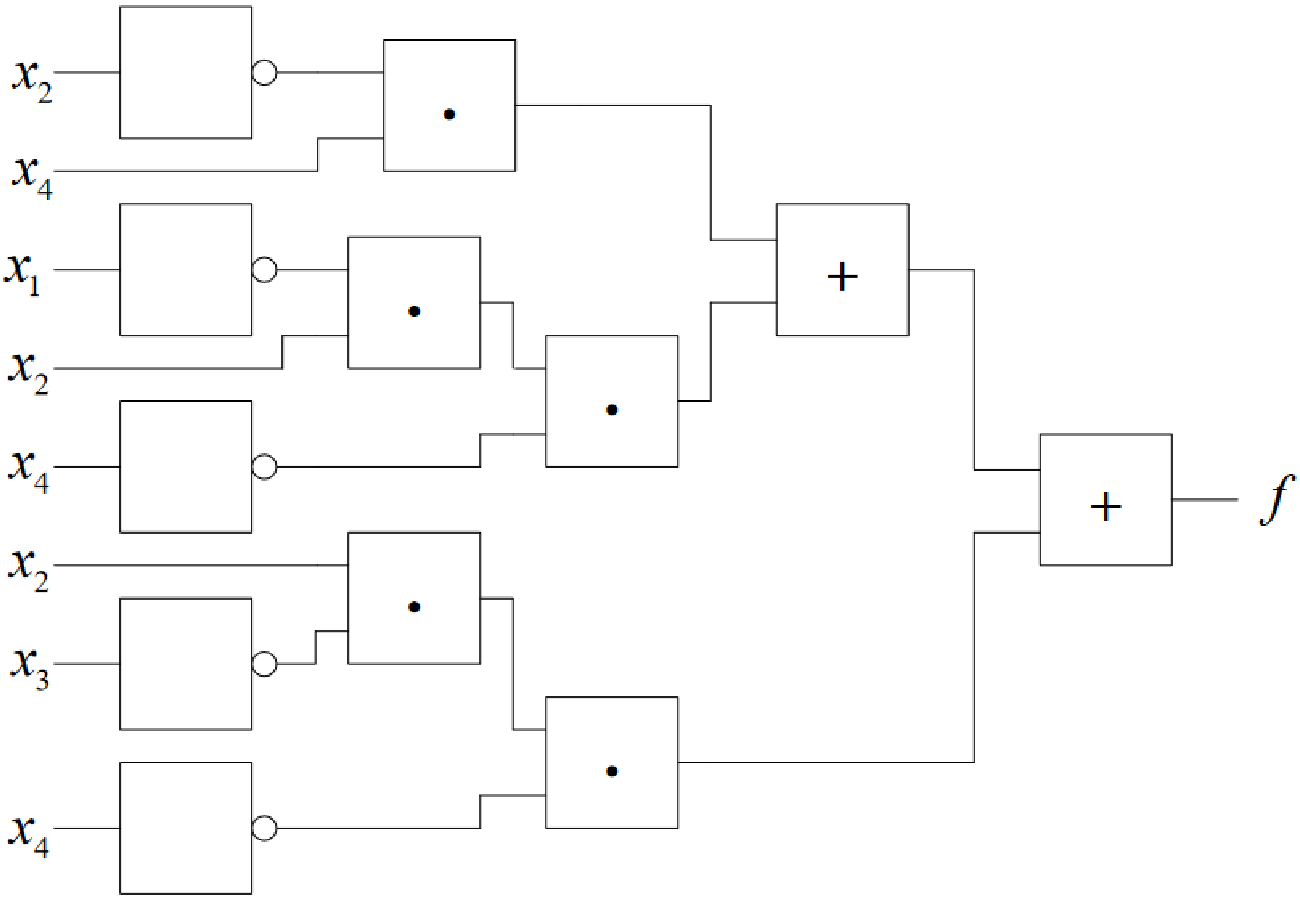


$f_{DNFmin} = \overline{x_2}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_4} + x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

Bez ograničenja broja ulaza:



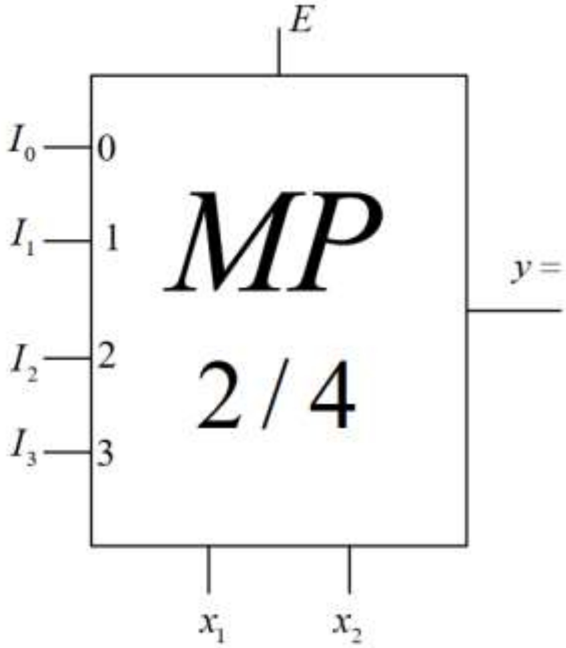
Sa dvoulaznim I, ILI elementima:



KOMBINACIONI MODULI

Zadatak 1. Realizovati multiplekser 2/4 u NI bazisu sa NI elementima bez ograničenja broja ulaza.

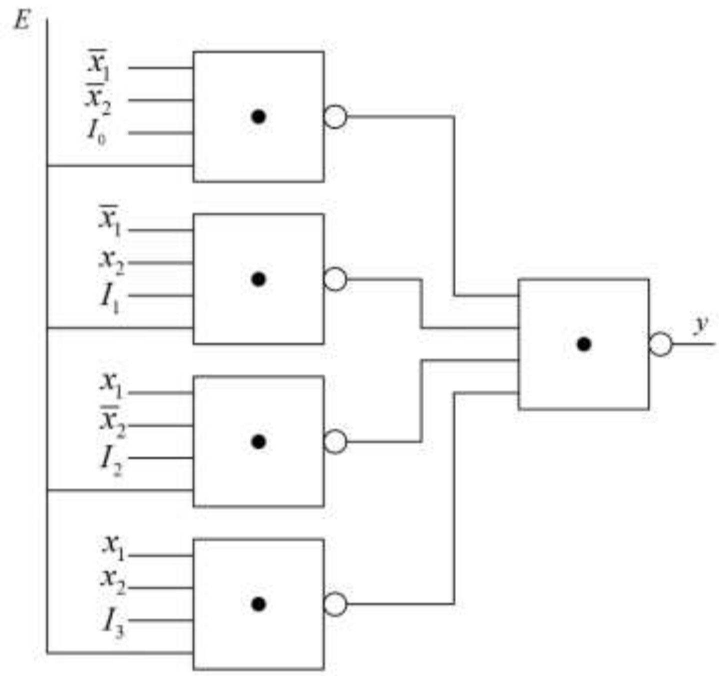
Rešenje:



$$y = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 I_0 E + \bar{x}_1 x_2 I_1 E + x_1 \bar{x}_2 I_2 E + x_1 x_2 I_3 E$$

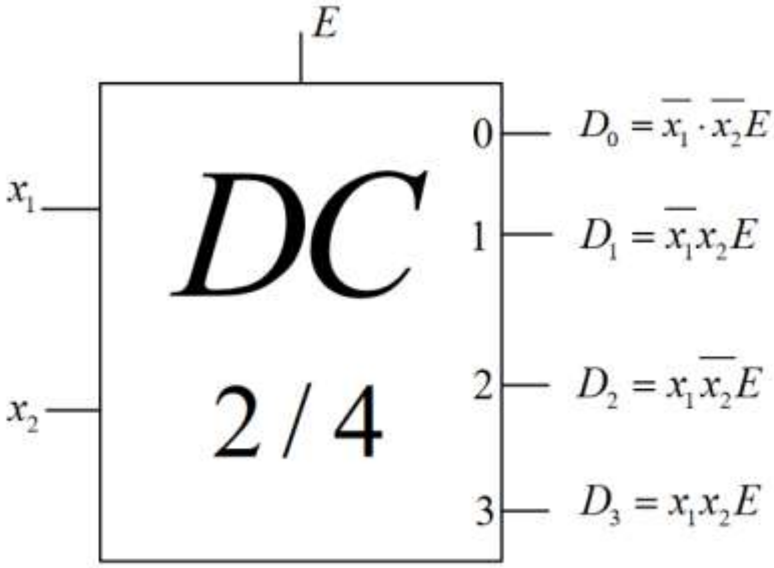
$$y = \overline{\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 I_0 E + \bar{x}_1 x_2 I_1 E + x_1 \bar{x}_2 I_2 E + x_1 x_2 I_3 E}}$$

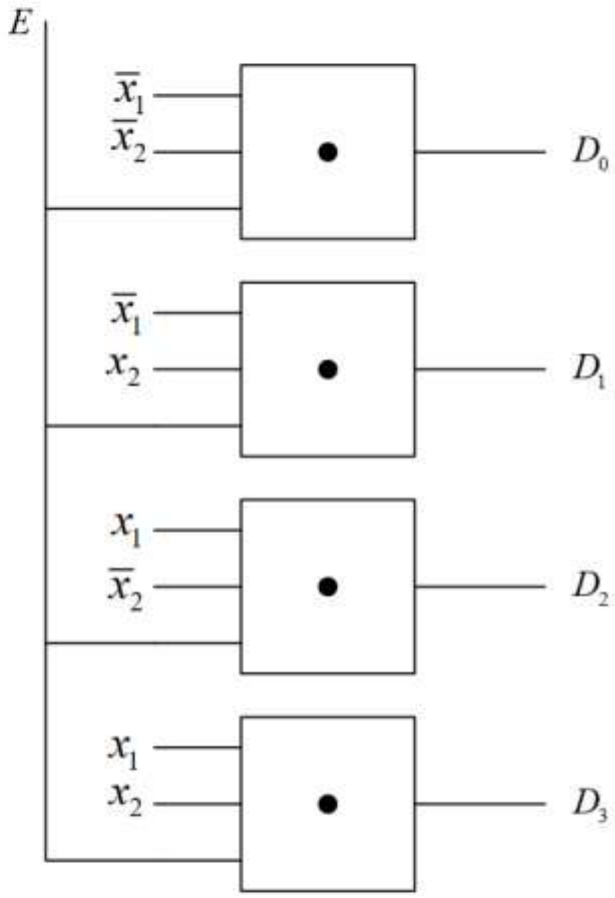
$$y = \overline{\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 I_0 E} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_2 I_1 E} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_2 I_2 E} \cdot \overline{x_1 x_2 I_3 E}}$$



Zadatak 2. Realizovati dekoder 2/4 sa I, ILI elementima bez ograničenja broja ulaza. Dozvoljene su negacije na ulazima ovih elemenata.

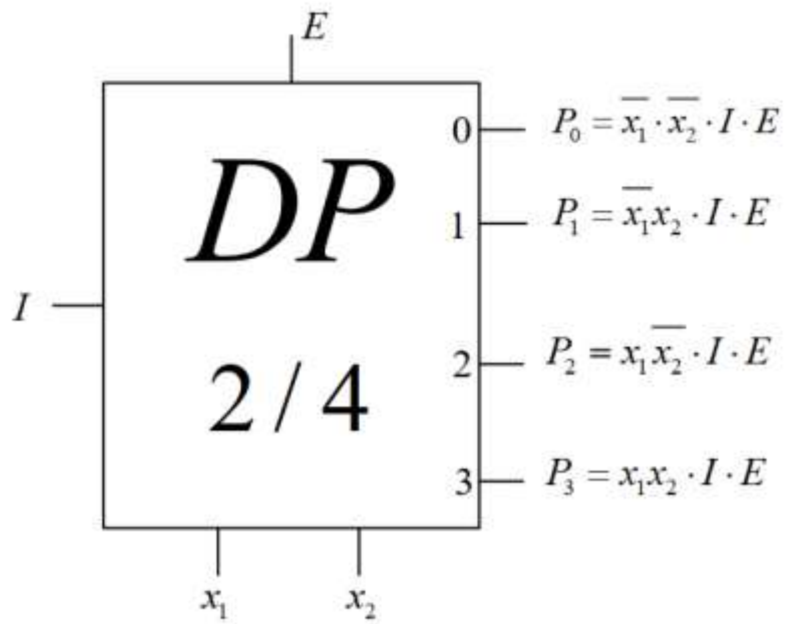
Rešenje:

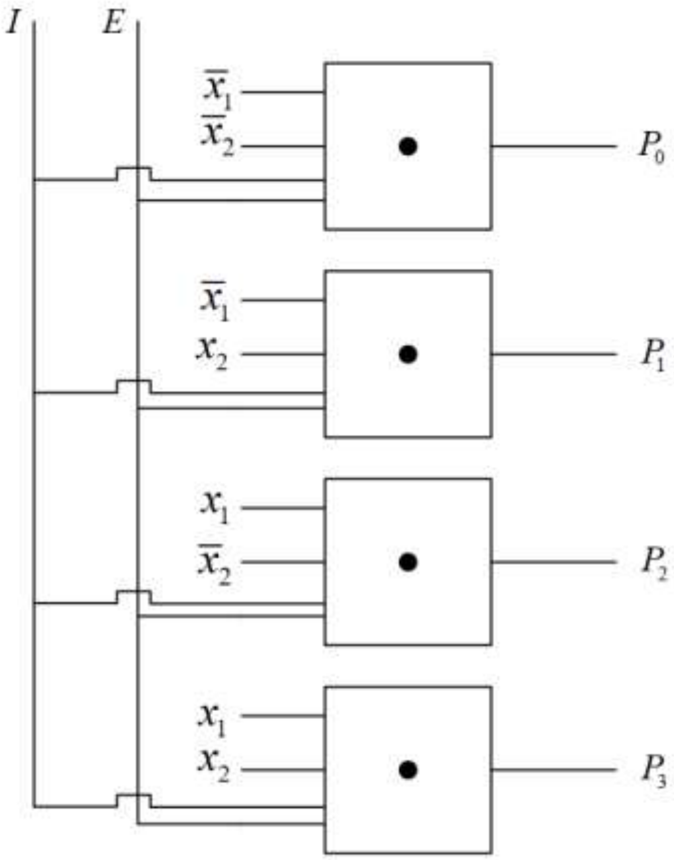




Zadatak 3. Realizovati demultiplekser 2/4 sa I, ILI elementima bez ograničenja broja ulaza. Dozvoljene su negacije na ulazima ovih elemenata.

Rešenje:





Zadatak 4. Realizovati prekidačku funkciju $f = \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2 + x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3$ pomoću multipleksera sa 3 upravljačka i 8 informacionih ulaza. Realizovati dobijeni multiplekser pomoću dekodera i odgovarajućeg broja I i ILI elemenata.

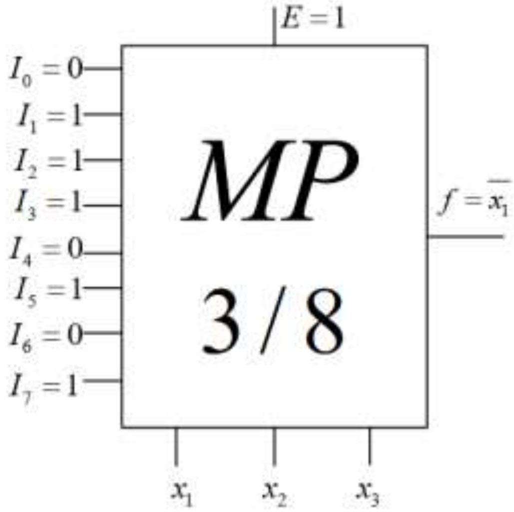
Rešenje:

$$f = \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2 + x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3$$

$\overline{x_1}x_3$	$\overline{x_1}x_2$	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x_2}x_3$
0X1	01X	111	101
001	010		
011	011		

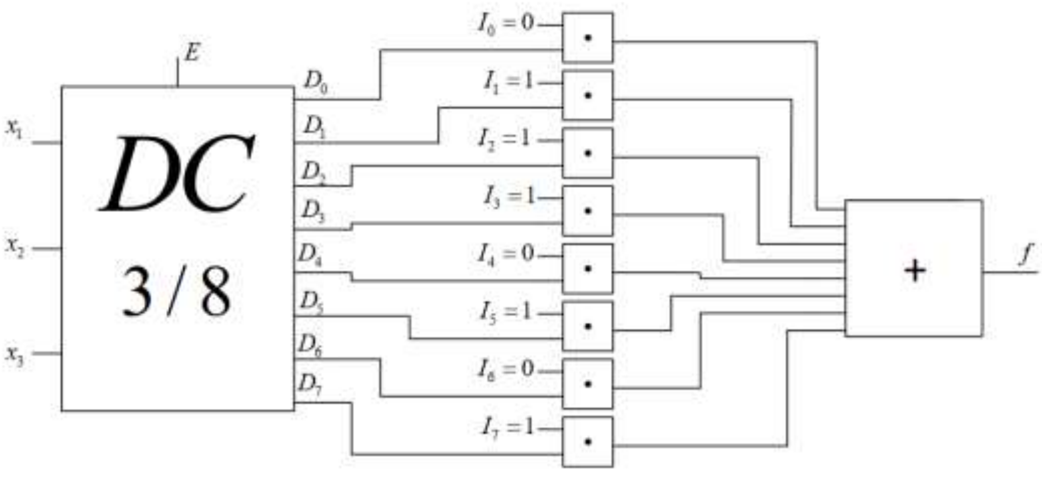
$\Rightarrow f(1) = \{1,2,3,5,7\}$

$\Rightarrow f(0) = \{0,4,6\}$



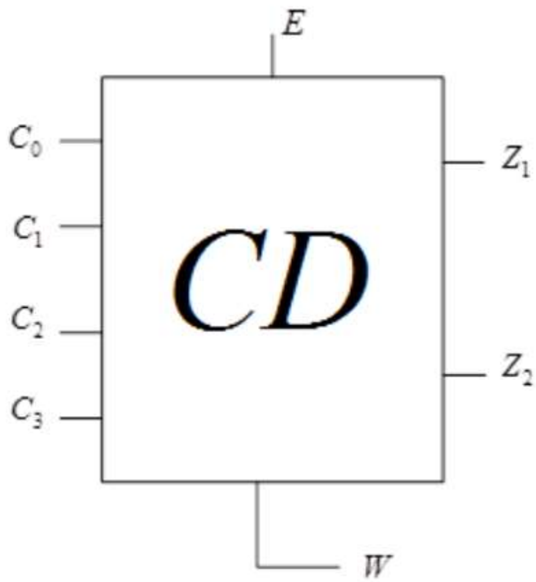
$f = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}I_0 + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}x_3I_1 + \ldots + x_1x_2x_3I_7$

Realizacija multipleksera pomoću dekodera i I i ILI elemenata:



Zadatak 5. Realizovati koder 4/2 bez prioriteta sa I, ILI elementima bez ograničenja broja ulaza.

Rešenje:

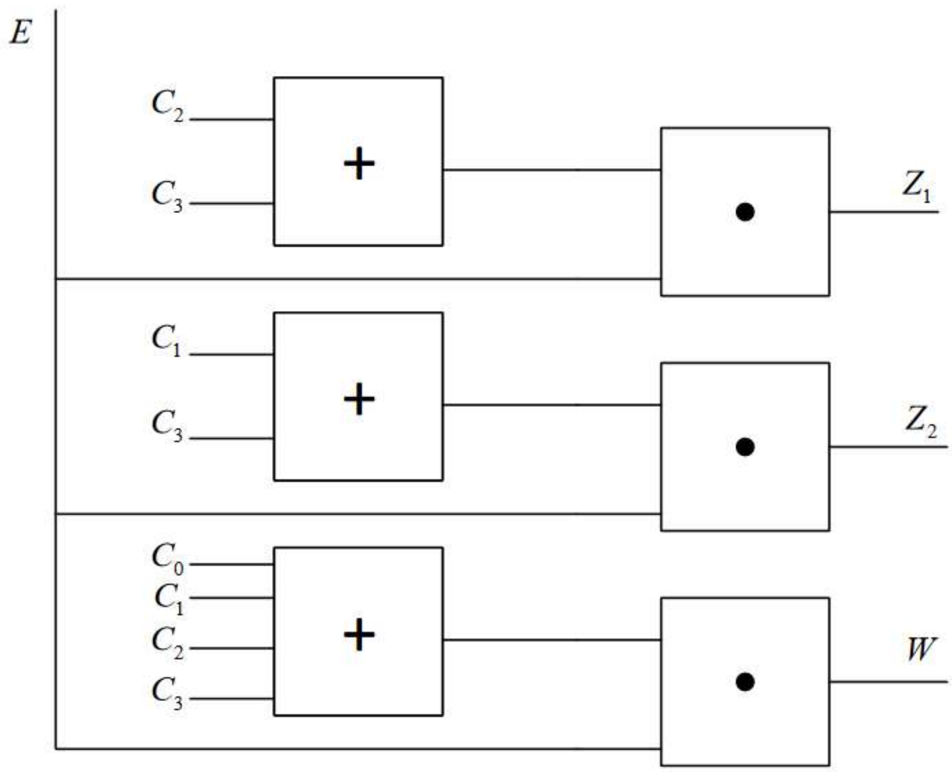


$C_0 C_1\ C_2\ C_3$	$Z_1\ Z_2$	W
0000	00	0
1000	00	1
0100	01	1
0010	10	1
0001	11	1

$Z_1 = (C_2 + C_3) \cdot E$

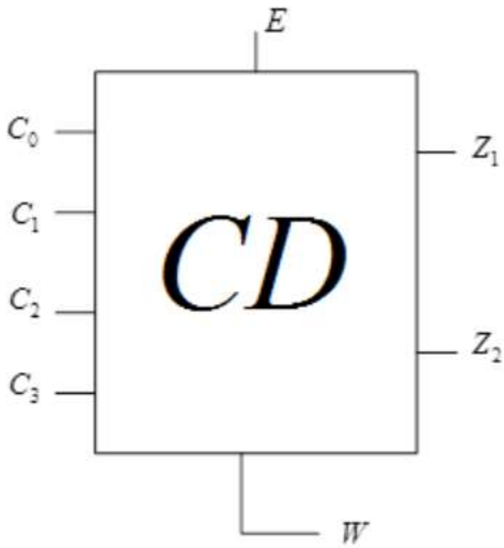
$Z_2 = (C_1 + C_3) \cdot E$

$W = (C_0 + C_1 + C_2 + C_3) \cdot E$



Zadatak 6. Realizovati koder 4/2 sa prioritetom sa I, ILI elementima bez ograničenja broja ulaza. Dozvoljene su negacije na ulazima ovih elemenata.

Rešenje:



$C_0 C_1\ C_2\ C_3$	$Z_1\ Z_2$	W
0000	00	0
1000	00	1
X100	01	1
XX10	10	1
XXX1	11	1

$$Z_1 = (C_2\,\overline{C_3} + C_3)\cdot E = ((C_2 + C_3)(\overline{C_3} + C_3))\cdot E = (C_2 + C_3)\cdot E$$

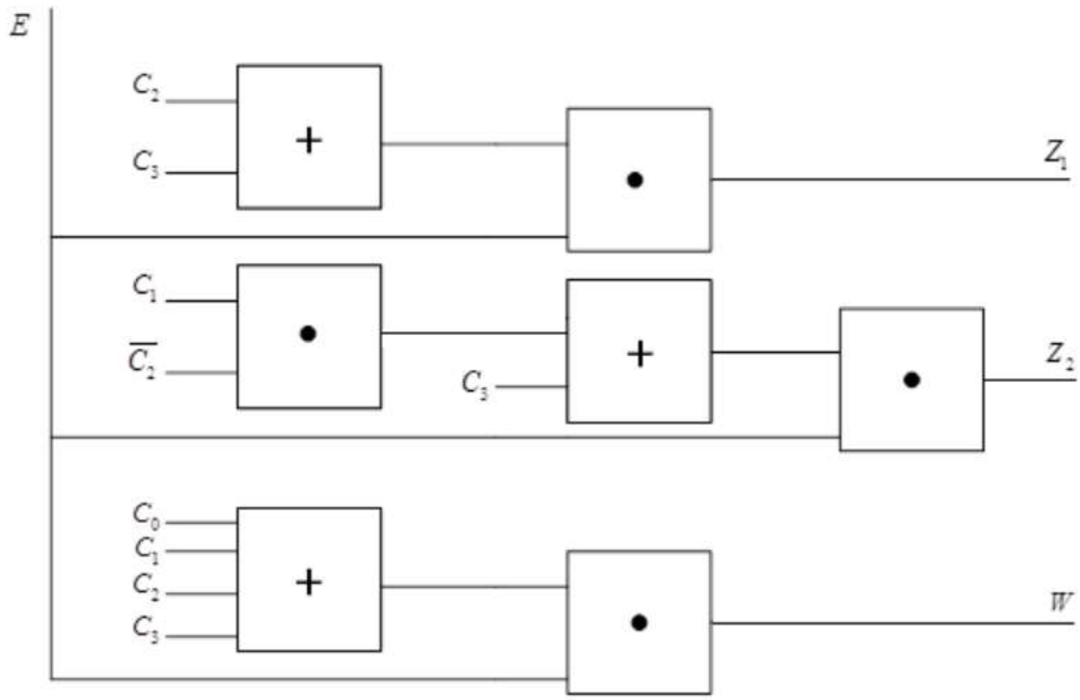
$$Z_2 = (C_1\,\overline{C_2}\,\overline{C_3} + C_3)\cdot E = ((C_1\,\overline{C_2} + C_3)(\overline{C_3} + C_3))\cdot E = (C_1\overline{C_2} + C_3)\cdot E$$

$$W = (C_0\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3} + C_1\,\overline{C_2}\,\overline{C_3} + C_2\,\overline{C_3} + C_3)\cdot E =$$

$$= (\overline{C_2}\,\overline{C_3}(C_0\overline{C_1} + C_1) + (C_2 + C_3)(\overline{C_3} + C_3))\cdot E =$$

$$= (\overline{C_2}\,\overline{C_3}(C_0 + C_1) + C_2 + C_3)\cdot E = (\overline{C_2 + C_3}(C_0 + C_1) + C_2 + C_3)\cdot E=$$

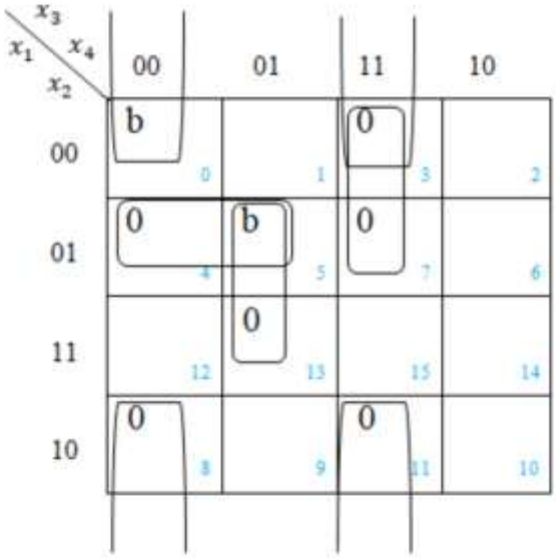
$$= ((\overline{C_2 + C_3} + C_2 + C_3)(C_0 + C_1 + C_2 + C_3))\cdot E = (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)\cdot E$$



ŠANONOVA TEORIJA RAZVIJANJA

Zadatak 1. Prekidačka funkcija zadata je skupovima indeksa: $f(0) = \{3,4,7,8,11,13\}$ i $f(b) = \{0,5\}$. Realizovati zadatu prekidačku funkciju pomoću multipleksera sa 2 upravljačka i 4 informaciona ulaza.

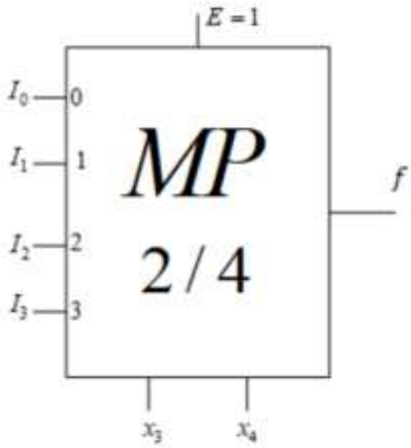
Rešenje:



$$f_{KNFmin} = (x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4})(\overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4})(x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

Sada se primenjuje Šanonova teorema razvijanja funkcije kako bi se f_{KNFmin} prikazala u obliku funkcije dve promenljive. Biraju se 2 promenljive koje se najčešće pojavljuju, u ovom slučaju to su promenljive x_3 i x_4.

$\Longrightarrow$



$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_4}I_0 + \overline{x_3}x_4I_1 + x_3\overline{x_4}I_2 + x_3x_4I_3 \qquad (1)$$

Na informacione ulaze ovog multipleksora dovode se signali koji su funkcija promenljivih x_1 i x_2.

Šanonov razvoj funkcije po promenjivim x_3 i x_4:

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_4} f(x_1, x_2, 0{,}0) + \overline{x_3} x_4 f(x_1, x_2, 0{,}1) + x_3 \overline{x_4} f(x_1, x_2, 1{,}0) + x_3 x_4 f(x_1, x_2, 1{,}1) \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi:

$I_0 = f(x_1, x_2, 0{,}0) = x_2(x_1 + \overline{x_2}) = x_1 x_2 + x_2 \overline{x_2} = x_1 x_2$

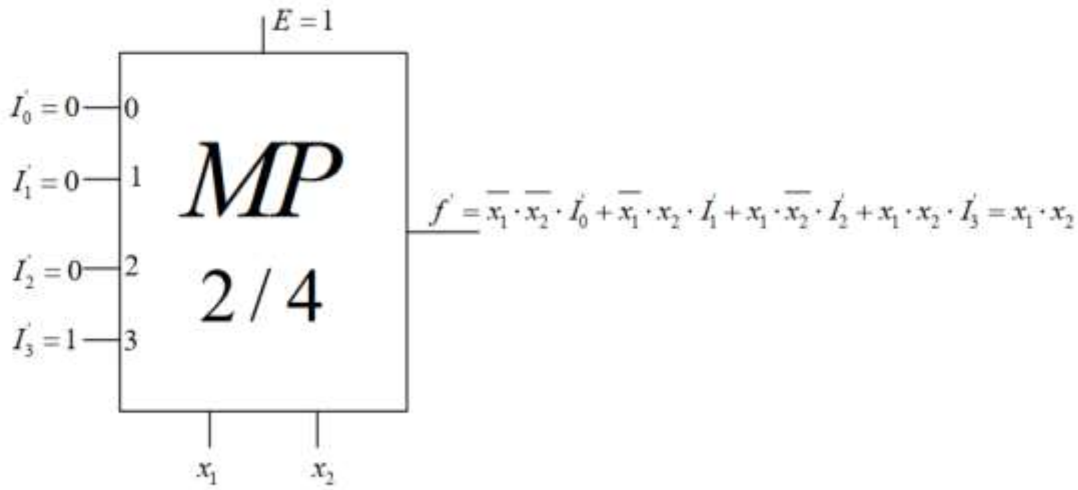
$I_1 = f(x_1, x_2, 0{,}1) = (x_1 + \overline{x_2})\overline{x_2} = x_1 \overline{x_2} + \overline{x_2} = \overline{x_2}(x_1 + 1) = \overline{x_2}$

$I_2 = f(x_1, x_2, 1{,}0) = 1$

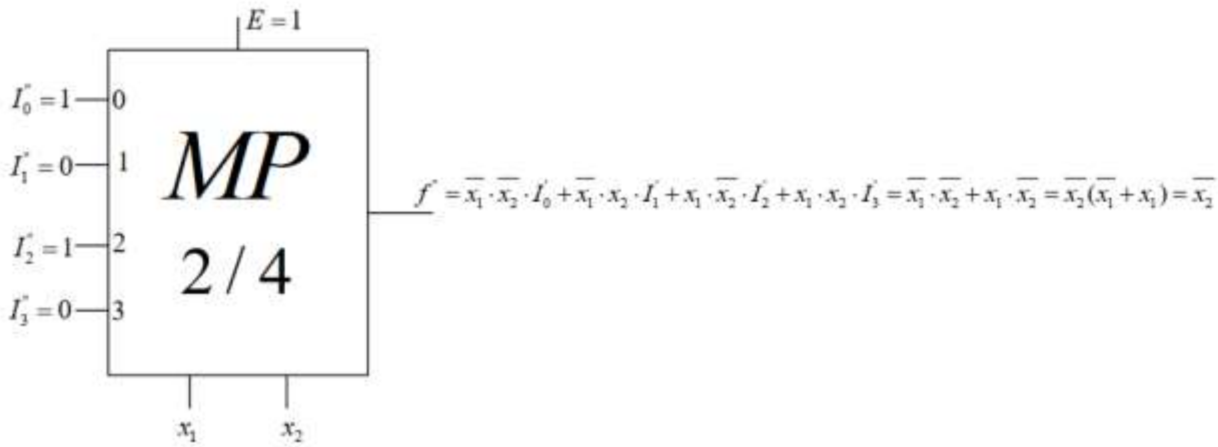
$I_3 = f(x_1, x_2, 1{,}1) = x_1 x_2$

Vrednosti $x_1 x_2$ i $\overline{x_2}$ se realizuju pomoću 2 multipleksora 2/4 na sledeći način:

Za realizaciju funkcije $x_1 x_2$ na informacione ulaze $I_0' = I_1' = I_2'$ prvog multipleksora dovodi se 0, a na ulaz I_3' dovodi se 1.

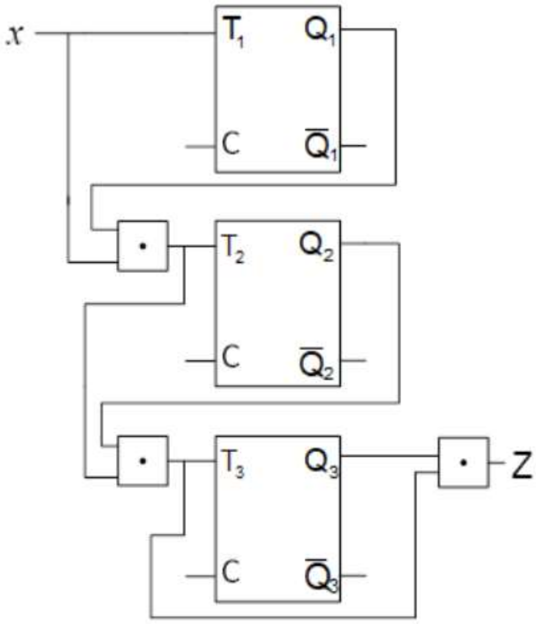


Za realizaciju funkcije $f'' = \overline{x_2} = \overline{x_2} \cdot 1 = \overline{x_2}(x_1 + \overline{x_1}) = x_1 \overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}$ na informacione ulaze $I_0'' = I_2''$ drugog multipleksora dovodi se 1, a na ulaze $I_1'' = I_3''$ dovodi se 0.



ANALIZA SEKVENCIJALNIH MREŽA

Zadatak 1. Nacrtati graf prelaza/izlaza za sekvencijalnu mrežu sa slike.



Rešenje:

Funkcije pobude flip flopova su:

$T_1 = x$

$T_2 = xQ_1$

$T_3 = T_2Q_2 = xQ_1Q_2$

Zakon funkcionisanja T flip flopa je:

Q(t+1)=$\bar{T}Q + T\bar{Q}$

Funkcije prelaza $Q_1(t+1)$, $Q_2(t+1)$ i $Q_3(t+1)$ su:

$Q_1(t+1) = \bar{T_1}Q_1 + T_1\overline{Q_1} = \bar{x}Q_1 + x\overline{Q_1}$

Pomoću kubova pronalazimo vektore $xQ_1Q_2Q_3$ na kojima funkcija $Q_1(t+1)$ ima vrednost 1.

$\bar{x}Q_1$	$x\overline{Q_1}$
<u>01XX</u>	<u>10XX</u>
0100	1000
0101	1001
0110	1010
0111	1011

Funkcija $Q_1(t+1)$ ima vrednost 1 na vektorima: 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011.

$$Q_2(t+1) = \overline{T_2}Q_2 + T_2\overline{Q_2} = \overline{xQ_1}Q_2 + xQ_1\overline{Q_2} = (\bar{x} + \overline{Q_1})Q_2 + xQ_1\overline{Q_2} =$$
$$= \bar{x}Q_2 + \overline{Q_1}Q_2 + xQ_1\overline{Q_2}$$

Pomoću kubova pronalazimo vektore $xQ_1Q_2Q_3$ na kojima funkcija $Q_2(t+1)$ ima vrednost 1.

$\bar{x}Q_2$	$\overline{Q_1}Q_2$	$xQ_1\overline{Q_2}$
0X1X	X01X	110X
0010	0010	1100
0011	0011	1101
0110	1010	
0111	1011	

Funkcija $Q_2(t+1)$ ima vrednost 1 na vektorima: 0010, 0011, 0110, 0111, 1010, 1011, 1100, 1101.

$$Q_3(t+1) = \overline{T_3}Q_3 + T_3\overline{Q_3} = \overline{xQ_1Q_2}Q_3 + xQ_1Q_2\overline{Q_3} = (\bar{x} + \overline{Q_1} + \overline{Q_2})Q_3 + xQ_1Q_2\overline{Q_3} =$$
$$= \bar{x}Q_3 + \overline{Q_1}Q_3 + \overline{Q_2}Q_3 + xQ_1Q_2\overline{Q_3}$$

Pomoću kubova pronalazimo vektore $xQ_1Q_2Q_3$ na kojima funkcija $Q_3(t+1)$ ima vrednost 1.

$\bar{x}Q_3$	$\overline{Q_1}Q_3$	$\overline{Q_2}Q_3$	$xQ_1Q_2\overline{Q_3}$
0XX1	X0X1	XX01	1110
0001	0001	0001	
0011	0011	0101	
0101	1001	1001	
0111	1011	1101	

Funkcija $Q_3(t+1)$ ima vrednost 1 na vektorima: 0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1110.

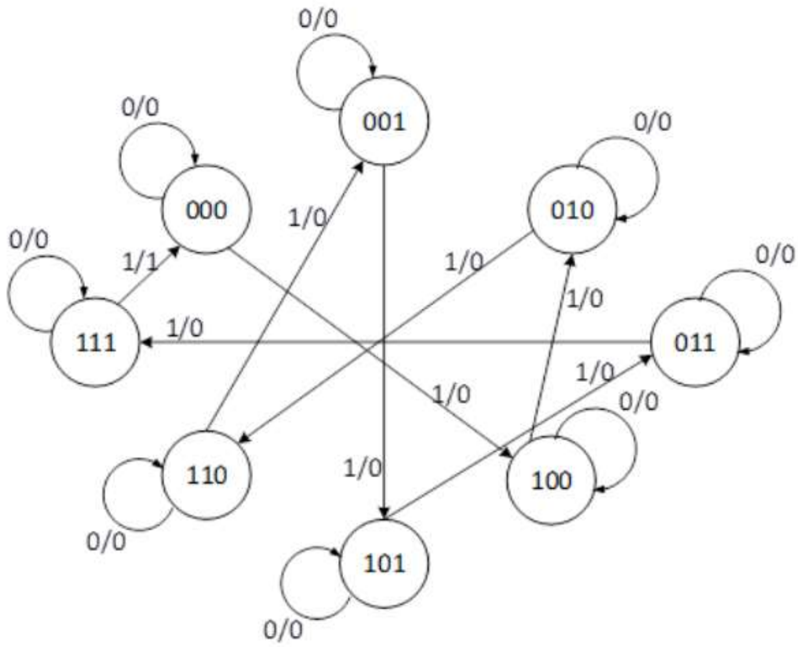
Funkcija izlaza Z je:

$Z = T_3Q_3 = xQ_1Q_2Q_3$ - Mreža je Mealy-jevog tipa jer izlaz zavisi od ulaza i stanja mreže.

$\boldsymbol{X(x)}$ / $\boldsymbol{Q(Q_1Q_2Q_3)}$	**0**	**1**
0 0 0	000/0	100/0
0 0 1	001/0	101/0
0 1 0	010/0	110/0
0 1 1	011/0	111/0
1 0 0	100/0	010/0
1 0 1	101/0	011/0
1 1 0	110/0	001/0
1 1 1	111/0	000/1

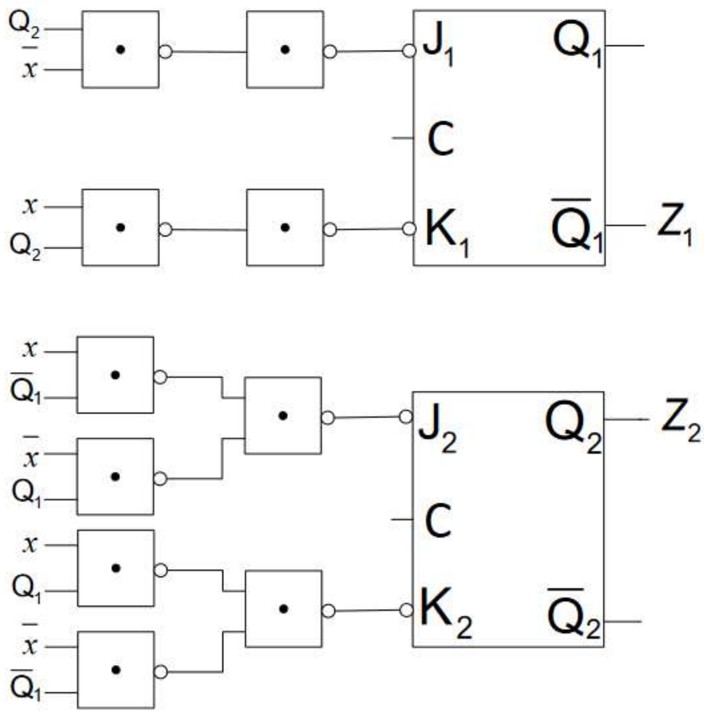
Tablica prelaza/izlaza

Na osnovu tablice prelaza/izlaza crta se graf prelaza/izlaza. Kod grafa svako stanje je čvor. Vrednosti pridružene strelicama su vrednosti ulaz/izlaz.



Graf prelaza/izlaza

Zadatak 2. Nacrtati tablicu i graf prelaza/izlaza taktovane sekvencijalne mreže zadate strukturnom šemom na slici.



Rešenje:

Funkcije pobude flip flopova su:

$$J_1 = \overline{\overline{\bar{x}Q_2}} = \bar{x}Q_2$$

$$K_1 = \overline{\overline{xQ_2}} = xQ_2$$

$$J_2 = \overline{\overline{x\overline{Q_1}} \cdot \overline{\bar{x}Q_1}} = x\overline{Q_1} + \bar{x}Q_1$$

$$K_2 = \overline{\overline{xQ_1} \cdot \overline{\bar{x}\,\overline{Q_1}}} = xQ_1 + \bar{x}\,\overline{Q_1}$$

Sa slike se vidi da su upotrebljeni flip flopovi kod kojih je 0 aktivna vrednost ulaznih signala, pa funkcija prelaza JK flip flopa ima oblik:

$$Q(t+1) = \bar{J}\,\bar{Q} + KQ$$

Funkcije prelaza $Q_1(t+1)$ i $Q_2(t+1)$ su:

$$\begin{aligned} Q_1(t+1) &= \bar{J_1}\,\overline{Q_1} + K_1Q_1 = \overline{\bar{x}Q_2}\,\overline{Q_1} + xQ_2Q_1 = (x+\overline{Q_2})\overline{Q_1} + xQ_2Q_1 = \\ &= x\overline{Q_1} + \overline{Q_1}\,\overline{Q_2} + xQ_1Q_2 \end{aligned}$$

Pomoću kubova pronalazimo vektore xQ_1Q_2 na kojima funkcija $Q_1(t+1)$ ima vrednost 1.

$x\overline{Q_1}$	$\overline{Q_1}\,\overline{Q_2}$	xQ_1Q_2
10X	X00	111
100	000	
101	100	

Funkcija $Q_1(t+1)$ ima vrednost 1 na vektorima: 000, 100, 101, 111.

$$\begin{aligned} Q_2(t+1) &= \bar{J_2}\,\overline{Q_2} + K_2Q_2 = \overline{x\overline{Q_1} + \bar{x}Q_1}\,\overline{Q_2} + (xQ_1 + \bar{x}\,\overline{Q_1})Q_2 = \\ &= \overline{x\overline{Q_1}}\;\overline{\bar{x}Q_1}\,\overline{Q_2} + xQ_1Q_2 + \bar{x}\,\overline{Q_1}Q_2 = \\ &= (\bar{x} + Q_1)(x + \overline{Q_1})\overline{Q_2} + xQ_1Q_2 + \bar{x}\,\overline{Q_1}Q_2 = \\ &= (\bar{x}\,\overline{Q_1} + xQ_1)\overline{Q_2} + xQ_1Q_2 + \bar{x}\,\overline{Q_1}Q_2 = \\ &= \bar{x}\,\overline{Q_1}\,\overline{Q_2} + xQ_1\overline{Q_2} + xQ_1Q_2 + \bar{x}\,\overline{Q_1}Q_2 \end{aligned}$$

Pomoću kubova pronalazimo vektore xQ_1Q_2 na kojima funkcija $Q_2(t+1)$ ima vrednost 1.

$\bar{x}\,\overline{Q_1}\,\overline{Q_2}$	$xQ_1\overline{Q_2}$	xQ_1Q_2	$\bar{x}\,\overline{Q_1}Q_2$
000	110	111	001

Funkcija $Q_2(t+1)$ ima vrednost 1 na vektorima: 000, 001, 110, 111.

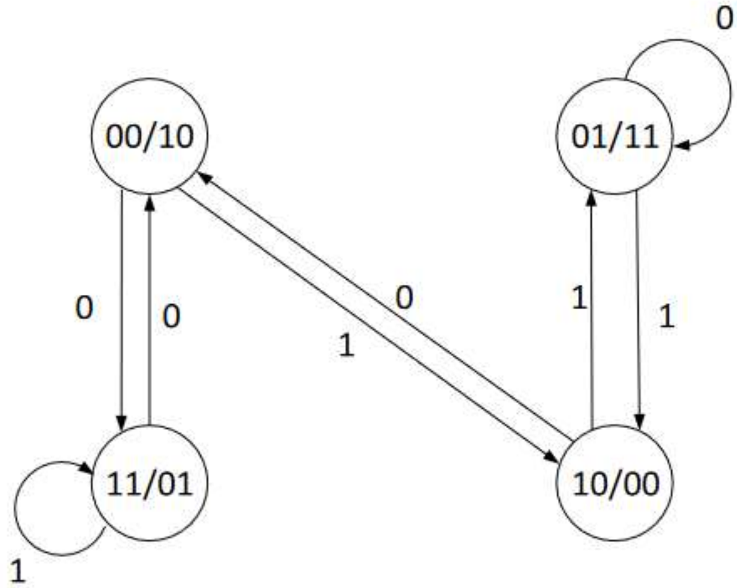
Funkcije izlaza Z_1 i Z_2 su:

$Z_1 = \overline{Q_1}$
$Z_2 = Q_2$ - Mreža je Moor-ovog tipa jer izlazi zavise samo od stanja mreže.

$X(x)$ / $Q(Q_1Q_2)$	**0**	**1**	Z_1Z_2
0 0	11	10	1 0
0 1	01	10	1 1
1 0	00	01	0 0
1 1	00	11	0 1

Tablica prelaza/izlaza

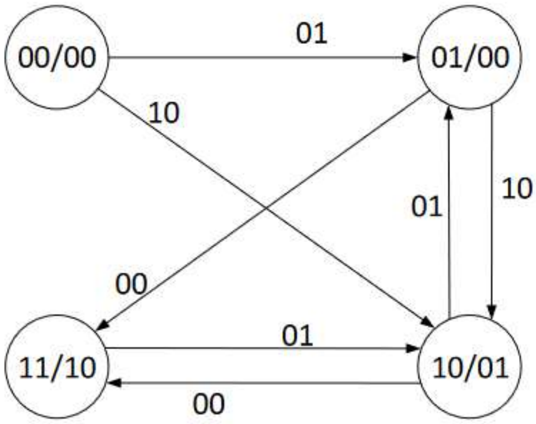
Na osnovu tablice prelaza/izlaza crta se graf prelaza/izlaza. Kod grafa svako stanje je čvor, a pošto je mreža Moor-ovog tipa čvoru se pridružuje i izlaz (jer zavisi samo od stanja mreže). Vrednosti pridružene strelicama su vrednosti ulaza.



Graf prelaza/izlaza

SINTEZA SEKVENCIJALNIH MREŽA

Zadatak 1. Konstruisati strukturnu šemu taktovane sekvencijalne mreže zadate grafom prelaza/izlaza na slici koristeći JK flip flopove i NI elemente. Pretpostaviti da vektori signala koji nisu naznačeni na grafu ne dolaze na ulaze mreže kada se ona nalazi u odgovarajućem stanju. Na ulaze mreže ne dolaze negacije nezavisno promenljivih.



Rešenje:

Na osnovu grafa prelaza/izlaza vidimo da je reč o mreži Moor-ovog tipa. Crtamo tablicu prelaza/izlaza:

$Q(Q_1Q_2)$ \ $X(x_1x_2)$	**00**	**01**	**10**	**11**	Z_1Z_2
0 0	bb	01	10	bb	0 0
0 1	11	bb	10	bb	0 0
1 0	11	01	bb	bb	0 1
1 1	bb	10	bb	bb	1 0

Tablica prelaza/izlaza

U tablicu prelaza/izlaza upisujemo simbole *bb* za vektore koji nisu naznačeni na grafu.

Tablica pobude JK flip flopa kada je 1 aktivna vrednost ulaznih signala je:

Q Q(t+1)	J K
0 0	0 *b*
0 1	1 *b*
1 0	*b* 1
1 1	*b* 0

Na osnovu tablice prelaza/izlaza i tablice pobude JK flip flopa, konstruiše se kombinaciona tabela. Iz te tabele se izvode funkcije pobude flip flopova i funkcije izlaza zadate sekvencijalne mreže.

X	Q	$Q(t+1)$	JK		Z
x_1x_2	Q_1Q_2	$Q_1(t+1)Q_2(t+1)$	J_1K_1	J_2K_2	Z_1Z_2
00	00	b b	bb	bb	0 0
	01	1 1	1b	b0	0 0
	10	1 1	b0	1b	0 1
	11	b b	bb	bb	1 0
01	00	0 1	0b	1b	0 0
	01	b b	bb	bb	0 0
	10	0 1	b1	1b	0 1
	11	1 0	b0	b1	1 0
10	00	1 0	1b	0b	0 0
	01	1 0	1b	b1	0 0
	10	b b	bb	bb	0 1
	11	b b	bb	bb	1 0
11	00	b b	bb	bb	0 0
	01	b b	bb	bb	0 0
	10	b b	bb	bb	0 1
	11	b b	bb	bb	1 0

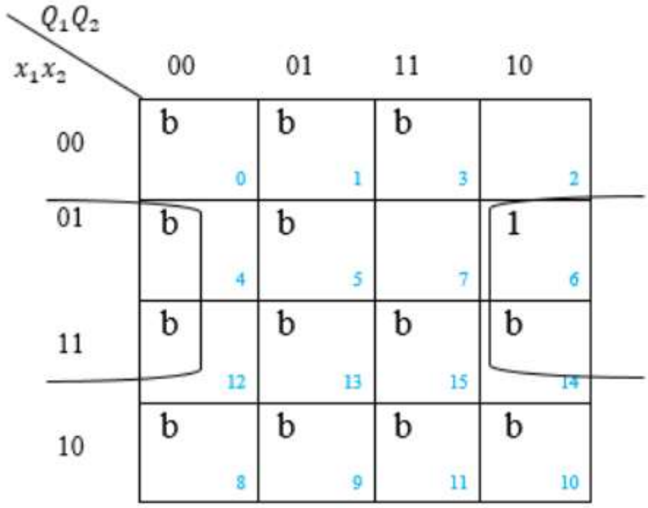
Kombinaciona tabela funkcija pobude flip flopova i funkcija izlaza mreže

Pošto su na raspolaganju NI elementi, treba naći minimalne DNF funkcija pobuda flip flopova i minimalne DNF funkcija izlaza mreže.

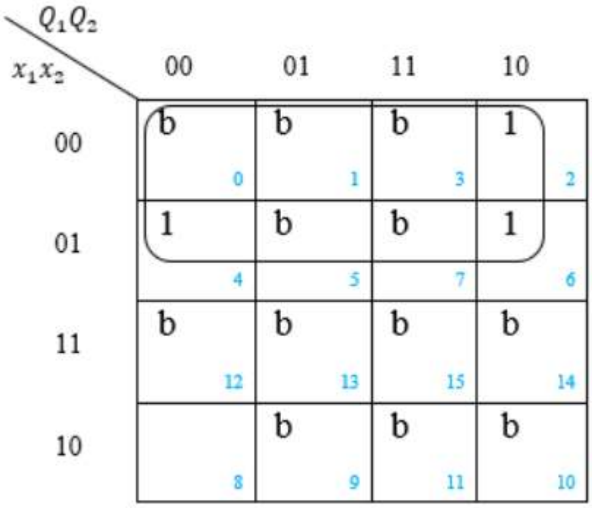
Pomoću Karnoovih tablica dobija se:

x_1x_2 \ Q_1Q_2	00	01	11	10
00	b (0)	1 (1)	b (3)	b (2)
01	(4)	b (5)	b (7)	b (6)
11	b (12)	b (13)	b (15)	b (14)
10	1 (8)	1 (9)	b (11)	b (10)

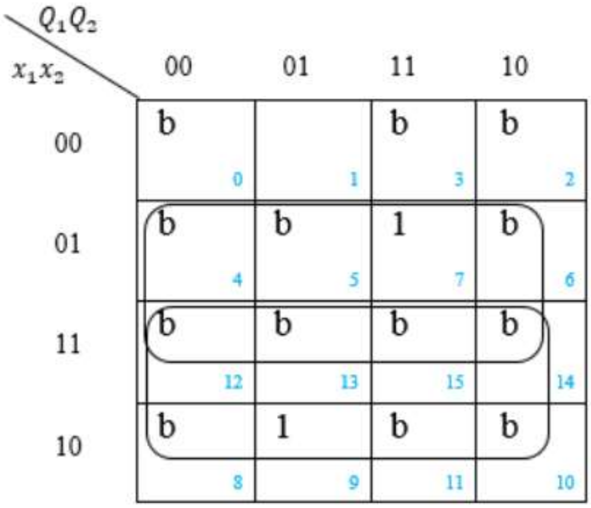
$J_1 = \overline{x_2}$



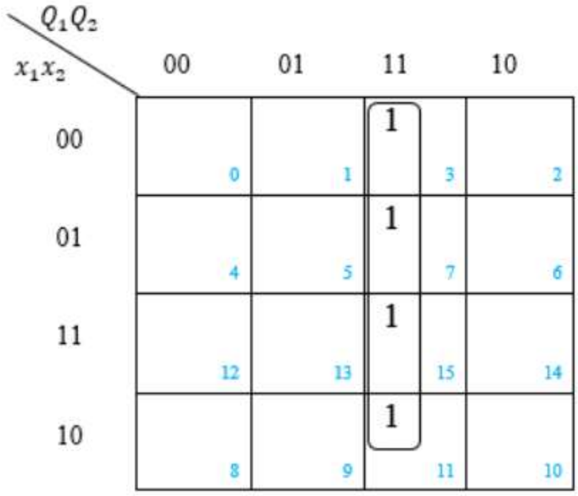
$$K_1 = x_2\overline{Q_2} = \overline{\overline{x_2\overline{Q_2}}}$$



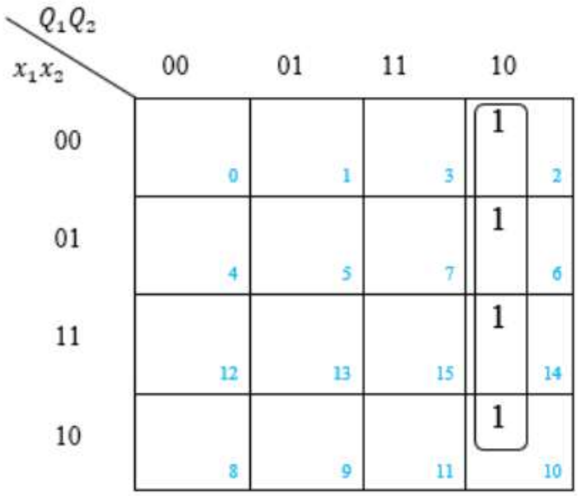
$$J_2 = \overline{x_1}$$



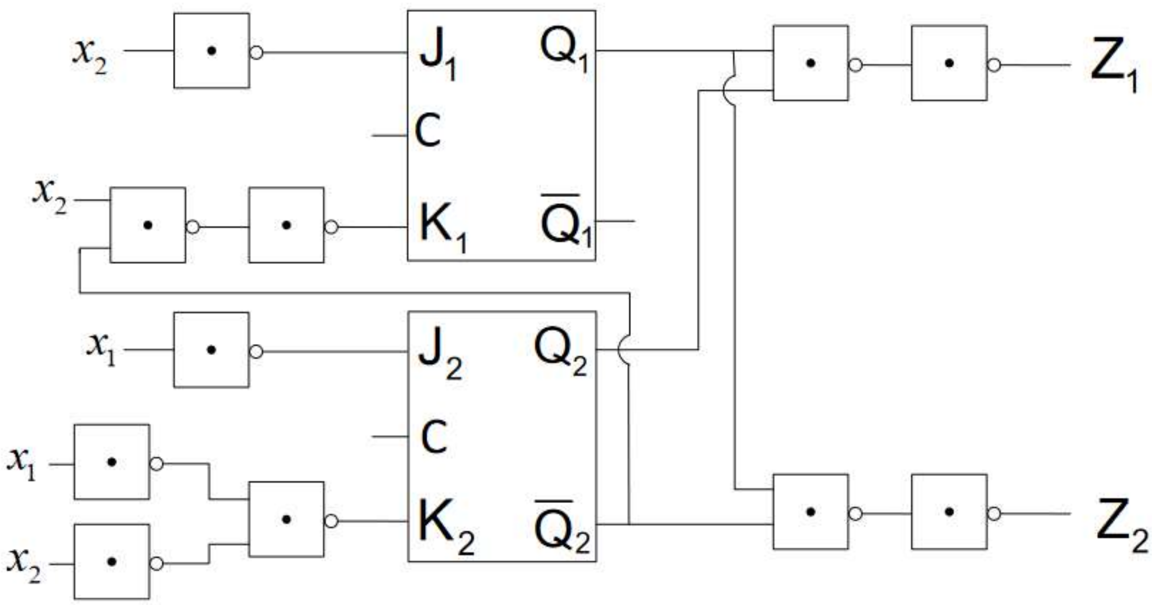
$$K_2 = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}$$



$Z_1 = Q_1Q_2 = \overline{\overline{Q_1Q_2}}$



$Z_2 = Q_1\overline{Q_2} = \overline{\overline{Q_1\overline{Q_2}}}$



Strukturna šema sekvencijalne mreže