3 PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Definicija

Pod parcijalnom diferencijalnom jednačinom podrazumevamo bilo koju jednačinu koja se odnosi na neku nepoznatu funkciju $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, *njene argumente* $x_1, \ldots, x_n \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, *i neke njene parcijalne izvode.*

Red najvišeg parcijalnog izvoda koji figuriše u takvoj jednačini naziva se redom te jednačine.

(a) Ako je $z = z(x, y)$ funkcija dve promenljive x, y, onda opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda glasi

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

(b) Ako je $u = u(x, y, z)$ funkcija tri promenljive x, y, z, onda opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda glasi

$$F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

3 1 HOMOGENA LIN PARC DIFERENCIJALNA JEDNAČINA I REDA

Definition

U slučaju da je $z = z(x, y)$ nepoznata funkcija, pod homogenom linearnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom podrazumevamo jednačinu oblika

$$A(x, y) \cdot p + B(x, y) \cdot q = 0, \tag{1}$$

gde je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, i funkcije $A(x, y) \neq 0$ i $B(x, y) \neq 0$ su neprekidne u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Njeno rešavanje blisko je povezano sa rešavanjem obične diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)}, \tag{2}$$

koju možemo zapisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}.$$

Jednačina (2) je obična diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $y = y(x)$. Njeno opšte rešenje

$$\varphi(x, y) = C, \qquad (C \in \mathbb{C}) \tag{3}$$

nazivamo prvim integralom.

Theorem

Ako je $\varphi(x, y) = C$ bilo koji prvi integral jednačine (2), onda je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$z = F(\varphi(x, y)),$$

pri čemu je $F(u)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija.

Primetimo da u opštem rešenju posmatrane parcijalne diferencijalne jednačine ne učestvuje proizvoljna konstanta C, već proizvoljna diferencijabilna funkcija F.

Example

Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine: $y^2p + 2xq = 0$.

U ovom slučaju je $A(x, y) = y^2$ i $B(x, y) = 2x$.

Pridružena diferencijalna jednačina: $\dfrac{dx}{y^2} = \dfrac{dy}{2x}$, odnosno $2xdx = y^2dy$.

Integracijom dobijamo: $x^2 = \frac{y^3}{3} + C$.

Prvi integral: $\varphi(x, y) = x^2 - \frac{y^3}{3} = C$.

Dakle, opšte rešenje ove jednačine dato je sa

$$z = F(x^2 - \frac{y^3}{3}),$$

gde je $F(u)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija na nekom intervalu.

Definition

U slučaju da je $u = u(x, y, y)$ nepoznata funkcija, pod homogenom linearnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom podrazumevamo jednačinu oblika

$$A(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

pri čemu su $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z) \neq 0$ neprekidne u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini pridružuje se sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{A(x, y, z)} = \frac{dy}{B(x, y, z)} = \frac{dz}{C(x, y, z)}. \tag{5}$$

Ovaj sistem dat je u simetričnom obliku. Ako je rešiv, onda ima samo opšte rešenje sastavljeno od dva njegova prva integrala

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1 \quad \text{i} \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

pri čemu su $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, i φ_1 i φ_2 su nezavisne funkcije u smislu da je odgovarajući Jakobijan različit od nule, tj.

$$\mathscr{J}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Theorem

Ako su $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ i $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ dva linearno nezavisna prva integrala jednačine (5), onda je opšte rešenje jednačine (4) dato sa

$$z = F(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)),$$

gde je $F(u, v)$, proizvoljna diferencijabilna funkcija dva argumenta $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Example

Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$(x+2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ovoj jednačini pridružujemo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}.$$

Njegova dva prva integrala su $x - z = C_1$ i $y - z^2 = C_2$, pa je opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine dato sa

$$u = F(x - z, y - z^2),$$

gde je $F = F(u, v)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljivih u i v.

Example

Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine:

$$(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini pridružujemo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}.$$

Iz relacije

$$\frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z},$$

nakon množenja sa $2y^2$, dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Nakon integracije, dobijamo i prvi integral sistema

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{y}{z} = C_1.$$

Sa druge strane,

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3}$$

predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y^3}{x^3 + 3xy^2},$$

odnosno, jednačinu

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^3}{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Uvodeći smenu

$$\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y' = xt' + t,$$

imamo da je

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1+3t^2}{t+t^3}dt.$$

Integracijom dobijamo da je

$$x(t+t^3) = C_2,$$

pa vraćajući smenu dobijamo i drugi prvi integral sistema

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{x^2y+y^3}{x^2} = C_2.$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je sada

$$u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2y+y^3}{x^2}\right),$$

gde je $F(u,v)$ proizvoljna funkcija.

3 2 NEHOMOGENA LIN PARC DIFERENCIJALNA JEDNAČINA I REDA

Definition

U slučaju da je $z = z(x, y)$ nepoznata funkcija, pod nehomogenom linearnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom podrazumevamo jednačinu oblika

$$A(x, y, z) \cdot p + B(x, y, z) \cdot q = C(x, y, z), \tag{6}$$

gde je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, i funkcije $A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z) \neq 0$ su neprekidne u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Jednačini (6) pridružuje se homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina oblika

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

sa nepoznatom funkcijom $u = u(x, y, z)$. Pokazuje se da ako je $u(x, y, z)$ opšte rešenje jednačine (7), onda se opšte rešenje jednačine (6) dobija iz

$$u(x, y, z) = 0$$

implicitnim rešavanjem po $z = z(x, y)$.

Example

Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine:

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy.$$

Odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina je

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Izračunajmo prve integrale:
Iz jednakosti

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

dobijamo

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Posmatrajmo sada jednakost

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Ako bismo levu i desnu stranu pomnožili sa y, i iz prvog integrala zamenili $x = C_1 y$, dobijamo jednačinu oblika

$$-C_1 y dy = z dz,$$

a njenim rešavanjem i prvi integral

$$xy + z^2 = C_2.$$

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine zapisujemo kao

$$F\left(\frac{x}{y}, xy + z^2\right) = 0,$$

gde je F proizvoljna funkcija.

Example

Naći opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine:

$$(x^2 - yz)\frac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - yz)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x+y).$$

Posmatrajmo sisitem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)}.$$

Koristićemo osobinu proporcije

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$

Sada je

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{z(x+y)}.$$

Nakon množenja izrazom $x + y$, dobijamo

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}.$$

Kako je odavde $\ln x - y = \ln C_1 z$, to je prvi integral

$$\frac{x-y}{z} = C_1.$$

Ako sada u relaciji

$$\frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)},$$

iskoristimo vezu

$$x = C_1 z + y,$$

dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dz}{dy} = \frac{C_1 z^2 + 2zy}{y^2 - yz},$$

odnosno jednačinu

$$\frac{dz}{dy} = \frac{C_1 \left(\frac{z}{y}\right)^2 + 2\frac{z}{y}}{1 - \frac{z}{y}}.$$

Sada možemo uvesti smenu

$$\frac{z}{y} = u \quad \Rightarrow \quad z' = yu' + u.$$

Dobijena homogena diferencijalna jednačina se ovom smenom svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive datu sa

$$\frac{1-u}{(C_1+1)u^2 + u} du = \frac{dy}{y}.$$

Funkcija na levoj strani jednakosti može predstaviti kao zbir

$$\frac{1-u}{(C_1+1)u^2 + u} = \frac{1}{1-u} - \frac{C_1+2}{(C_1+1)u+1},$$

odakle integracijom dobijamo

$$\int \frac{1-u}{(C_1+1)u^2 + u} du = \ln u - \frac{C_1+2}{C_1} \ln (C_1+1)u + 1.$$

Vratimo se u jednačinu koja razdvaja promenljive.

Imamo da je

$$C_2 u = y((C_1+1)u + 1)^{\frac{C_1+2}{C_1+1}},$$

odnosno,

$$C_2 = \frac{y^2}{z}(\frac{x-y+z}{y} + 1)^{\frac{x+y-2z}{x-y+z}}.$$

Time smo dobili i drugi prvi integral sistema.

Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine možemo sada zapisati kao

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

gde je F proizvoljna funkcija, a φ_1 i φ_2 nađeni prvi integrali sistema.