2 SISTEMI DIFERENCIJALNI JEDNAČINA

2 1 SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I REDA

Pretpostavimo da su

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

realne funkcije realnog argumenta x definisane na nekom intervalu (a, b) realne ose.

Definicija

Sistem od n diferencijalnih jednačina je skup od n jednačina u kojima figurišu

- *nezavisno promenljiva x,*
- *nepoznate funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$*
- *i njihovi izvodi.*

Definicija

Za sistem kažemo da je sistem prvog reda ako u njega ulaze samo prvi izvodi nepoznatih funkcija.

Svaki sistem jednačina višeg reda može se svesti na odgovarajući sistem jednačina prvog reda.

Example

Sistem drugog reda:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2y_3 \\ y_2'' - y_1 &= \sin x \\ x + y_3' &= 12 \end{aligned}$$

Smena: $y_2' = y_4 \quad \Rightarrow \quad y_2'' = y_4'$

Sistem prvog reda:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2y_3 \\ y_4' - y_1 &= \sin x \\ x + y_3' &= 12 \\ y_2' &= y_4 \end{aligned}$$

Jedan od najjednostavnijih slučajeva je normalni sistem, odnosno sistem u Košijevom obliku:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Ovde ćemo razmatrati slučaj kada su funkcije $f_1, f_2, \dots, f_n$ linearne funkcije po $y_1, y_2, \dots, y_n$, tj. razmatraćemo linearni sistem od n difencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Sistem (2) možemo zapisati i u obliku

$$Y' = A \cdot Y + B, \tag{3}$$

gde je

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \qquad Y' = \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}.$$

Teorema

Za proizvoljnu fiksiranu tačku $x_0 \in (a, b)$ i proizvoljan vektor $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji i to jedinstveno rešenje $Y = Y(x)$ sistema (3) u intervalu (a, b) koje zadovoljava početni uslov $Y(x_0) = Y_0$.

Rešenje $Y = Y(x; C_1, \dots, C_n)$ sistema (3) koje zavisi od proizvoljnih realnih konstanti $C_1, C_2, \dots, C_n$ naziva se njegovim opštim rešenjem ako za svako drugo rešenje $Z(x)$ postoje odgovarajuće konstante $C_i = C_i^0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ tako da je za svako $x \in (a, b)$ ispunjeno $Y(x; C_1^0, \dots, C_n^0) = Z(x)$.

Teorema

Rešenje $Y = Y(x; C_1, \dots, C_n)$ sistema (3) je opšte rešenje tog sistema ako i samo ako za svako $x_0 \in (a, b)$ i svako $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ postoje konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$ takve da je $Y(x_0; C_1, \dots, C_n) = Y_0$.

2 2 HOMOGENI LINEARNI SISTEMI I REDA

Neka su

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

rešenja homogenog linearnog sistema (4). Da bi se ispitala linearna nezavisnost ovih rešenja, uvodi se funkcionalna determinanta

$$W(x) = W(Y_1, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \qquad (x \in (a, b))$$

koja se naziva Vronskijan.

Teorema

(a) *Iz linearne zavisnosti funkcija $Y_1, \dots, Y_n$ sledi da je $W(x) \equiv 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

(b) *Iz linearne nezavisnosti funkcija $Y_1, \dots, Y_n$ sledi da je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Skup od n linearno nezavisnih rešenja sistema (4) naziva se fundamentalnim sistemom rešenja, a odgovarajuća matrica

$$G(x) = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva se fundamentalnom matricom sistema jednačina (4).

Teorema

Homogeni linearni sistem (4) uvek poseduje n linearno nezavisnih rešenja na intervalu (a, b).

Teorema

Ako je $Y_1, \dots, Y_n$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogenog sistema (4), onda je njegovo opšte rešenje dato sa

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + \cdots + C_n Y_n(x) \qquad (x \in (a, b)).$$

Navedimo postupak za nalaženje bar jednog fundamentalnog sistema rešenja sistema (4).

Rešenja ćemo potražiti u obliku

$$Y = e^{\lambda x} Q = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

pri čemu je λ izvestan realan ili kompleksan broj, a Q je izvestan vektor prostora $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$).

Kako je $Y' = \lambda e^{\lambda x} Q$, to zamenom u sistem (4) dobijamo da je

$$\lambda e^{\lambda x} Q = e^{\lambda x} AQ,$$

$$AQ - \lambda Q = 0$$

$$(A - \lambda I)Q = 0.$$

Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n &= 0 \\ a_{21}q_1 + (a_{22} - \lambda)q_2 + \cdots + a_{2n}q_n &= 0 \\ \cdots & \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)q_n &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem je saglasan i ima netrivijalna rešenja ako je determinanta tog sistema jednaka nuli.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Kako je $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ karakteristični polinom matrice A, to je λ sopstvena vrednost, a Q odgovarajući sopstveni vektor matrice A.

U slučaju da su svi koreni karakterističnog polinoma realni i različiti, odgovarajuća rešenja sistema (4) su data sa

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} Q_1, \quad Y_2 = e^{\lambda_2 x} Q_2, \quad \ldots, \quad Y_n = e^{\lambda_n x} Q_n.$$

Da bi pokazali da ova rešenja čine fundamentalni sistem rešenja sistema (4), dovoljno proveriti da li je odovarajući Vronskijan različit od nule.

$$W(Y_1, \ldots, Y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} q_{11} & e^{\lambda_2 x} q_{12} & \cdots & e^{\lambda_n x} q_{1n} \\ e^{\lambda_1 x} q_{21} & e^{\lambda_2 x} q_{22} & \cdots & e^{\lambda_n x} q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_1 x} q_{n1} & e^{\lambda_2 x} q_{n2} & \cdots & e^{\lambda_n x} q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \Delta$$

Kako su $Q_1, \ldots, Q_n$ sopstveni vektori matrice A, to je $\Delta \neq 0$, pa je i $W(Y_1, \ldots, Y_n) \neq 0$. Dakle, rešenja $Y_1, \ldots, Y_n$ su nezavisna.

Example

Matričnom metodom rešiti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2, \end{aligned}$$

gde je $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ i $y_3 = y_3(x)$, $x \in D$.

Dati sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2, \end{aligned}$$

predstavićemo matričnom jednačinom

$$Y' = AY,$$

odnosno sa

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Odredimo karakteristični polinom matrice A.

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Sopstvene vrednosti matrice A su

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, i $\lambda_3 = -1$

Sopstveni vektori?

$$Y = e^{\lambda x} Q = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

Sopstveni vektori određuju se iz uslova

$$(A - \lambda I)Q = 0.$$

za $\lambda_1 = 2$, rešavamo sistem jednačina

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tj., sistem jednačina oblika

$$\begin{aligned} -q_1 - q_2 + q_3 &= 0, \\ q_1 - q_2 - q_3 &= 0, \\ 2q_1 - q_2 - 2q_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -q_1 - q_2 + q_3 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ q_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 0, \\ q_1 &= q_3, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Biramo da je $q_1 = 1$, tada je i $q_3 = 1$. Traženi sopstveni vektor matrice A je oblika

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Partikularno rešenje Y_1 koje odgovara vektoru Q^1 je tada

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Za sopstvenu vrednost $\lambda_2 = 1$ matrice A, rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dobijamo da je pause $q_1 = q_2 = q_3$. Uzimajući da je $q_1 = 1$, imamo da je

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t.$$

Za sopstvenu vrednost $\lambda_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ako izaberemo da je $q_1 = 1$, biće $q_2 = -3$ i $q_3 = -5$. Tada je

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

a odavde imamo i da je partikularno rešenje X_3 oblika

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Opšte rešenje matrične diferencijalne jednačine dato je sa

$$Y = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2 + C_3 \cdot Y_3,$$

odnosno

$$Y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot e^{-t},$$

odakle ćemo rešenje početnog sistema diferencijalnih jednačina zapisati kao

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}, \\ y_2 &= C_2 e^{t} - 3C_3 e^{-t}, \\ y_3 &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} - 5C_3 e^{-t}. \end{aligned}$$

2 3 NEHOMOGENI LINEARNI SISTEM I REDA

Nehomogeni linearni sistem diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$Y' = A \cdot Y + B(x) \qquad (x \in (a, b)) \tag{1}$$

Teorema

Opšte rešenje Y_{on} nehomogenog sistema (1) jednako je zbiru opšteg rešenja Y_{oh} odgovarajućeg homogenog sistema

$$Y' = A \cdot Y \tag{2}$$

i bilo kog partikularnog rešenja Y_p nehomogenog sistema, tj.

$$Y_{on} = Y_{oh} + Y_p.$$

Za određivanje Y_p mogu se koristiti različite metode, kao na primer:

- Metod neodređenih koeficijenata (praktično funkcioniše samo za jednostavnije oblike funkcije $B(x)$).
- Lagranžov metod varijacije konstanti (zasnovan na integracionom računu).

Lagranžov metod varijacije konstanti:

Neka je

$$Y_{oh} = C_1 Y_1 + \cdots + C_n Y_n \tag{3}$$

opšte rešenje homogenog sistema (2).

Ako proizvoljne konstante u (3) posmatramo kao diferencijabilne funkcije po x, a zatim ih odredimo iz uslova da

$$Y = C_1(x) Y_1 + \cdots + C_n(x) Y_n \tag{4}$$

bude rešenje sistema (1), time se funkcijama $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ namaće uslov

$$C_1'(x) Y_1 + \cdots + C_n'(x) Y_n = B(x). \tag{5}$$

Ovaj uslov čini sistem od n linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$ koji ima jedinstveno rešenje (jer je njegova determinanta upravo Vronskijan koji je različit od nule).

Nakon rešavanja ovog sistema, do $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ dolazimo integracijom.

Example

Matričnom metodom rešiti sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} y_1' - 4y_1 - y_2 &= -36x, \\ y_2' + 2y_1 - y_2 &= -2e^x. \end{aligned}$$

Sistem u normalnom obliku dat je sa

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 - 36x, \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 - 2e^x \end{aligned}$$

a u matričnom obliku je

$$Y' = AY + B(x),$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -36x \\ -2e^x \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Sopstvene vrednosti matrice A su

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Sopstveni vektor Q_1, za vrednost $\lambda_1 = 2$, nalazimo iz sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tj. sistema oblika

$$\begin{aligned} -q_1 - q_2 &= 0, \\ -q_1 - q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde je $q_2 = -2q_1$, pa uzimajući za $q_1 = 1$, dobijamo sopstveni vektor

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

a samim tim i jedno od dva partikularna rešenja sistema

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Za sopstvenu vrednost $\lambda_2 = 3$ i sopstveni vektor Q_2, rešavamo sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je u ovom slučaju $q_1 = -q_2$, to za proizvoljno izabranu vrednost $q_1 = 1$, dobijamo da je

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

odakle je i

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{3t}.$$

Opšte rešenje homogenog sistema diferencijalnih jednačina je

$$Y_{oh} = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2,$$

$$Y_{oh} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{3x},$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_{1_{oh}} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \\ y_{2_{oh}} &= -2C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

Opšte rešenje početnog nehomogenog sistema diferencijalnih jednačina tražimo u obliku:

$$Y_{on} = C_1(x) \cdot Y_1 + C_2(x) \cdot Y_2,$$

gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ diferencijabilne funkcije po x koje je potrebno odrediti.

$$C_1'(x) \cdot Y_1 + C_2'(x) \cdot Y_2 = \mathbf{B}(x)$$

odnosno

$$C_1'(x) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{3x} = \begin{bmatrix} -36x \\ -2e^{x} \end{bmatrix}$$

Sistem jednačina sa nepoznatim funkcijama $C_1'(t)$ i $C_2'(t)$ oblika

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} &= -36x, \\ -2C_1'(x)e^{2x} - C_2'(x)e^{3x} &= -2e^{x}, \end{aligned}$$

ima rešenja

$$C_1'(x) = 36xe^{-2x} + 2e^{-x}$$

$$C_2'(x) = -72xe^{-3x} - 2e^{-2x}.$$

Integraleći ovako dobijene funkcije $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ imamo da je

$$C_1(x) = -2e^{-x} - 18xe^{-2x} - 9e^{-2x} + C_1$$

$$C_2(x) = e^{-2x} + 24xe^{-3x} + 8e^{-3x} + C_2.$$

Konačno, opšte rešenje nehomogenog sistema diferencijalnih jednačina dato je sa

$$\begin{aligned} y_{1_{on}} &= C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - e^{x} + 6x - 1, \\ y_{2_{on}} &= -2C_1e^{2x} - C_2e^{3x} + 3e^{x} + 12x + 10. \end{aligned}$$