1 2 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE n-tog REDA

1 2 2 HOMOGENA LINEARNA DIF JEDN SA KONSTANTNIM KOEF

Definicija

Jednačinu oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

gde su $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, nazivamo homogenom linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima.

Teorema

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljna rešenja jednačine (1). Tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \cdots + C_n \cdot y_n$ takođe rešenje ove jednačine.

Da bi se ispitala linearna nezavisnost rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uvodi se pojam funkcionalne determinante Vronskog:

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ & \cdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Teorema

Rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jednačine (1) su linearno nezavisna u intervalu D ako i samo ako je za svako $x \in D$ determinanta Vronskog (Vronskijan) različita od nule, tj. $W(x) \neq 0$.

Definicija

Skup od n linearno nezavisnih rešenja nazivamo fundamentalnim sistemom.

Teorema

Uvek postoji bar jedan sistem fundamentalnih rešenja jednačine (1).

Teorema

Ako je $y_1, y_2, \dots, y_n$ bilo koji sistem fundamentalnih rešenja homogene jednačine (1), onda je njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \cdots + C_n \cdot y_n,$$

pri čemu su $C_1, C_2, \dots, C_n$ proizvoljne realne konstante.

Posledica

Bilo kojih $n+1$ rešenja jednačine (1) jesu linearno zavisna.

Nađimo fundamentalni skup rešenja jednačine (1).

Uvodeći smenu

$$y = e^{\lambda x},$$

gde je λ konstanta, dobijamo jednačinu

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0,$$

odakle dolazimo do karakteristične jednačine

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{2}$$

Karakteristična jednačina ima n realnih ili kompleksnih rešenja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koja pri tom mogu biti prosta (jednostruka) ili višestruka. U zavisnosti od toga kakvi su koreni jednačine (2), razlikujemo sledeće slučajeve:

(a) Ako su svi koreni jednačine (2) realni i različiti, tada je

$$y_i = e^{\lambda_i x}, \quad \text{za svako } i = 1, 2, \dots, n.$$

(b) Ako je λ_1 koren višestrukosti k, tada njemu odgovaraju partikularna rešenja

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = x e^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda_1 x}.$$

(c) Ako je $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksan (jednostruki) koren jednačine (2), tada se javlja i koren $\overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$. Kompleksnim rešenjima $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\overline{\lambda}_1 x}$, odgovaraju realna rešenja

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{i} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

(d) Ako je $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksan koren višestrukosti k, i $\overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ (takođe višestrukosti k), tada su odgovarajuća realna rešenja

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x} \cos \beta x, & e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x, & x e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ \cdots & \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{array}$$

Example

(a) Jednačini

$$y'' + y' - 2y = 0$$

odgovara karakteristična jednačina

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Odgovarajuća partikularna rešenja date homogene diferencijalne jednačine su

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x},$$

pa je opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}.$$

Example

(b) Jednačini
$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 14y'' - 14y' + 5y = 0$$
odgovara karakteristična jednačina
$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 14\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0,$$
čija su rešenja
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2 + i, \quad \lambda_4 = 2 - i.$$
Odgovarajuća partikularna rešenja date homogene diferencijalne jednačine su
$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = e^{2x}\cos x, \quad y_4 = e^{2x}\sin x,$$
pa je opšte rešenje dato sa
$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x}\cos x + C_4e^{2x}\sin x.$$

Example

(c) Jednačini
$$y^{(5)} - 4y^{(3)} + 16y' = 0$$
odgovara karakteristična jednačina
$$\lambda^5 - 4\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2 = 0,$$
čija su rešenja
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -2i.$$
Odgovarajuća partikularna rešenja date homogene diferencijalne jednačine su
$$y_1 = 1, \quad y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = x\cos 2x, \quad y_4 = \sin 2x, \quad y_5 = x\sin 2x,$$
pa je opšte rešenje dato sa
$$y = C_1 + (C_2 + xC_3)\cos 2x + (C_4 + xC_5)\sin 2x.$$

1 2 3 NEHOM LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONST KOEF

Definicija

Jednačinu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

gde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *nazivamo nehomogenom linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima.*

Uporedo sa ovom jednačinom, posmatraćemo i odgovarajuću homogenu jednačinu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{2}$$

Neka je y_{oh} opšte rešenje homogene jednačine (2), i neka je y_p bilo koje partikularno rešenje nehomogene jednačine (1). Tada je opšte rešenje jednačine (1) funkcija

$$y_{on} = y_{oh} + y_p$$

Kako smo već razmatrali pitanje nalaženja opšteg rešenja homogene jednačine (2), to nam ostaje da se bavimo metodom nalaženja partikularnog rešenja nehomogene jednačine (1).

1 2 4 LANGRANŽOV METOD VARIJACIJE KONSTANTI

Neka $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čine fundamentalni skup rešenja jednačine (2). Tada je opšte rešenje homohene jednačine (2) dato sa

$$y_{oh} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{3}$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Metod varijacije konstanti se sastoji u sledećem:

Proizvoljne konstante u opštem rešenju (3) smatramo diferencijabilnim funkcijama po x, a zatim ih određujemo iz uslova da funkcija

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n \tag{4}$$

bude rešenje nehomogene jednačine (1).

Time se funkcijama $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ nameću sledeći uslovi:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \dots + C_n'(x)\cdot y_n &= 0\\
C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' + \dots + C_n'(x)\cdot y_n' &= 0\\
C_1'(x)\cdot y_1'' + C_2'(x)\cdot y_2'' + \dots + C_n'(x)\cdot y_n'' &= 0\\
\dots\\
C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)} &= 0\\
C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

Dakle, $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ čine rešenje sistema linearnih jednačina (5), čija je determinanta upravo Vronskijan

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Ako sa $W_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, označimo determinantu koja nastaje iz $W(x)$ kada i-tu kolonu zamenimo kolonom slobodnih članova (Kramerovo pravilo), dobijamo da je

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}.$$

Dalje, integracijom dolazimo do funkcija $C_i(x)$.

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x.$$

Prvo ćemo potražiti opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine:

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je oblika

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0,$$

odnosno

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0.$$

Kako su koreni ove jednačine $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, to je

$$y_{oh} = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x.$$

Partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y_{on} = C_1(x)e^x + C_2(x)e^x \cos x + C_3(x)e^x \sin x,$$

pri čemu funkcije $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ moraju da zadovolje sledeće uslove:

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x \cos x + C_3'(x)e^x \sin x = 0;\\
&C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x(\cos x - \sin x) + C_3'(x)e^x(\cos x + \sin x) = 0;\\
&C_1'(x)e^x - 2C_2'(x)e^x \sin x + 2C_3'(x)e^x \cos x = e^x.
\end{aligned}$$

Kramerovo pravilo

Glavna determinanta

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ 1 & -2\sin x & 2\cos x \end{vmatrix} = 1$$

Pomoćne determinante

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ 1 & -2\sin x & 2\cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 1 & 0 & \cos x + \sin x \\ 1 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = -\cos x,$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 1 & \cos x - \sin x & 0 \\ 1 & -2\sin x & 1 \end{vmatrix} = -\sin x.$$

$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}$, za $i = 1, 2, 3$,

$$C_1'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_1(x) = \int dx = x + D_1.$$

$$C_2'(x) = -\cos x \quad \Longrightarrow \quad C_2(x) = \int -\cos x \, dx = -\sin x + D_2$$

$$C_3'(x) = -\sin x \quad \Longrightarrow \quad C_3(x) = \int -\sin x \, dx = \cos x + D_3.$$

Opšte rešenje početne nehomogene jednačine

$$y_{on} = (x + D_1)e^x + (-\sin x + D_2)e^x \cos x + (\cos x + D_3)e^x \sin x$$

$$y_{on} = \underbrace{D_1e^x + D_2e^x \cos x + D_3e^x \sin x}_{y_{oh}} + \underbrace{xe^x}_{y_p}.$$

1 2 5 METOD NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

(a) *Ako u nehomogenoj diferencijalnoj jednačini*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (a_i \in R)$$

funkcija $f(x)$ *ima oblik*

$$f(x) = P_k(x) e^{ax},$$

gde je $P_k(x)$ *polinom stepena* k*, a konstanta* $a \in R$ *nije nula odgovarajuće karakteristične jednačine*

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

tj. ako je $q(a) \neq 0$*, tada nehomogena jednačina ima partikularno rešenje oblika*

$$y_p(x) = Q_k(x) e^{ax},$$

gde je $Q_k(x)$ *polinom stepena* k *čije koeficijente treba odrediti.*

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + 3y' - 4y = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Rešenje. Odgovarajuća karakteristična jednačina ima oblik

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4).$$

Kako je $a = -1$ i $q(-1) = -6 \neq 0$, to će partikularno reršenje diferencijalne jednačine biti

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x},$$

gde su A, B i C nepoznati koeficijenti.
Za partikularno rešenje jednačine važi da je

$$y_p'' + 3y_p' - 4y_p = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Kako je

$$y_p' = (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C)e^{-x}$$

i

$$y_p'' = (Ax^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C)e^{-x},$$

to, vraćajući funkcije y_p' i y_p'' u početnu diferencijalnu jednačinu, imamo da je

$$\left(-6Ax^2 + (2A - 6B)x + 2A + B - 6C\right) e^{-x} = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Odavde dobijamo sistem linearnih jednačina po nepoznatim A, B i C:

$$\begin{aligned} -6A &= 1; \\ 2A - 6B &= 1; \\ 2A + B - 6C &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{2}{9}$ i $C = -\frac{5}{54}$.

Partikularno reršenje diferencijalne jednačine je sada oblika

$$y_p = \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{5}{54}\right) e^{-x}.$$

Pošto je

$$y = y_{OH} + y_p,$$

to je funkcija

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{5}{54}\right) e^{-x}$$

opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine.

(b) *Ako u nehomogenoj diferencijalnoj jednačini*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (a_i \in R)$$

funkcija $f(x)$ *ima oblik*

$$f(x) = P_k(x) e^{ax},$$

gde je $P_k(x)$ *polinom stepena* k, *a konstanta* $a \in R$ *jeste nula odgovarajućeg karakterističnog polinoma*

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

tj. $q(a) = 0$, *tada nehomogena jednačina ima partikularno rešenje oblika*

$$y_p(x) = x^s Q_k(x) e^{ax},$$

gde je $Q_k(x)$ *polinom stepena* k *čije koeficijente treba odrediti, dok je* s *višestrukost nule* $\lambda = a$ *u polinomu* $q(\lambda)$.

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + 3y' - 4y = (x-2)e^{-4x}.$$

Rešenje. Kako je $a = -4$ nula višestrukosti $s = 1$ karakterističnog polinoma

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4),$$

to partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = x(Ax + B)e^{-4x} = (Ax^2 + Bx)e^{-4x},$$

gde su A i B nepoznati koeficijenti.
Zamenjujući

$$y_p' = \left(-4Ax^2 + (2A - 4B)x + B\right) e^{-4x}$$

i

$$y_p'' = \left(16Ax^2 + (-16A + 16B)x + 2A - 8B\right) e^{-4x}$$

$$(-10Ax + 2A - 5B)\, e^{-4x} = (x-2)e^{-4x},$$

odakle je $A = -\dfrac{1}{10}$ i $B = -\dfrac{9}{25}$.
Vraćajući konstante A i B u partikularno rešenje imamo da je

$$y_p = x\left(-\frac{1}{10}x - \frac{9}{25}\right)e^{-4x},$$

a odavde je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - x\left(\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^{-4x}$$

traženo opšte rešenje diferencijalne jednačine.

(c) *Ako u nehomogenoj diferencijalnoj jednačini*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (a_i \in R)$$

funkcija $f(x)$ *ima oblik*

$$f(x) = P_k(x)e^{ax}\cos bx + R_j(x)e^{ax}\sin bx,$$

gde su $P_k(x)$ *i* $R_j(x)$ *polinomi stepena* k, *odnosno* j, *a kompleksan broj* $a + bi \in C$ *nije nula odgovarajućeg karakterističnog polinoma* $q(\lambda)$, *tj.* $q(a+bi) \neq 0$, *tada nehomogena jednačina ima partikularno rešenje oblika*

$$y_p(x) = Q_m(x)e^{ax}\cos bx + \tilde{Q}_m(x)e^{ax}\sin bx,$$

gde su polinomi $Q_m(x)$ *i* $\tilde{Q}_m(x)$ *stepena* $m = \max\{k, j\}$ *čije koeficijente treba odrediti.*

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' - 4y = 2e^x \cos x + (x^2 + x)e^x \sin x.$$

Rešenje. Karakteristični polinom date diferencijalne jednačine je oblika

$$q(\lambda) = \lambda - 4.$$

Kako je $a = 1$ i $b = 1$, a odatle $q(1 + i) \neq 0$, to funkcija

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x \cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^x \sin x$$

predstavlja partikularno rešenje u kome su A, B, C, D, E i F nepoznate konstante.
Pošto je

$$\begin{aligned} y_p' &= \left((A + D)x^2 + (2A + B + E)x + B + C + F\right) e^x \cos x \\ &\quad + \left((-A + D)x^2 + (-B + 2D + E)x - C + E + F\right) e^x \sin x, \end{aligned}$$

to zamenjujući y_p i y_p' u polaznu jednačinu dolazi se do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} -3A + D &= 0 & \qquad -A - 3D &= 1 \\ 2A - 3B + E &= 0 & -B + 2D - 3E &= 1 \\ B - 3C + F &= 2 & -C + E - 3F &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $A = -\frac{1}{10}$, $D = -\frac{3}{10}$, $B = -\frac{11}{50}$, $E = -\frac{23}{50}$, $C = -\frac{89}{125}$ i $F = \frac{21}{250}$,
a odavde je

$$y = C_1 e^{4x} - \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{11}{50}x + \frac{89}{125}\right) e^x \cos x - \left(\frac{3}{10}x^2 + \frac{23}{50}x - \frac{21}{250}\right) e^x \sin x$$

opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine.

(d) *Ako u nehomogenoj diferencijalnoj jednačini*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (a_i \in R)$$

funkcija $f(x)$ *ima oblik*

$$f(x) = P_k(x) e^{ax} \cos bx + R_j(x) e^{ax} \sin bx,$$

gde su $P_k(x)$ *i* $R_j(x)$ *polinomi stepena* k, *odnosno* j, *a kompleksan broj* $a + bi \in C$ *jeste nula odgovarajućeg karakterističnog polinoma* $q(\lambda)$, *tj.* $q(a + bi) = 0$, *tada partikularno rešenje ima oblik*

$$y_p(x) = x^s \left(Q_m(x) e^{ax} \cos bx + \tilde{Q}_m(x) e^{ax} \sin bx \right),$$

gde su polinomi $Q_m(x)$ *i* $\tilde{Q}_m(x)$ *stepena* $m = \max\{k, j\}$ *čije koeficijente treba odrediti, a* s *je višestrukost nule* $a + bi$ *u polinomu* $q(\lambda)$.

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \sin x.$$

Rešenje. Za brojeve $a = b = 1$ kompleksan broj $a + bi = 1 + i$ je nula karakterističnog polinoma

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

višestrukosti $s = 1$, pa je

$$y_p = x\left(Ae^x \cos x + Be^x \sin x\right)$$

partikularno rešenje za koje je potrebno odrediti konstante A i B. Funkcije y_p' i y_p'' su oblika

$$y_p' = (A + Ax + Bx)e^x \cos x + (B + Bx - Ax)e^x \sin x$$

i

$$y_p'' = 2(A + B + Bx)e^x \cos x - 2(A - B + Ax)e^x \sin x.$$

Njihovom zamenom u datu nehomogenu diferencijalnu jednačinu, dobija se

$$2Be^x \cos x - 2Ae^x \sin x = 2e^x \sin x.$$

Odavde mora biti da je $2B = 0$, a, kako je $1 - 2A = 2$, to je $A = -1$. Partikularno rešenje je sada oblika

$$y_p = -xe^x \cos x,$$

dok je opšte rešenje diferencijalne jednačine dato sa

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - xe^x \cos x.$$

(e) *Kada je u nehomogenoj diferencijalnoj jednačini*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (a_i \in R)$$

funkcija $f(x)$ *predstavljena kao zbir više funkcija, odnosno*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_l(x),$$

tada je jedno partikularno rešenje te nehomogene jednačine

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_l}(x),$$

gde je y_{p_j} *partikularno rešenje jednačine*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Example

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

Rešenje. Funkcija $f(x)$ date diferencijalne jednačine predstavljena je kao zbir funcija e^{2x} i $\sin 2x$. Posmatrajmo prvo jednačinu

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x}.$$

Karakterističan polinom ove jednačine je

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8,$$

čiji su koreni $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. Zbog toga $a = 2$ nije njegova nula, pa je odgovarajuće partikularno rešenje y_{p_1} oblika

$$y_{p_1} = Ae^{2x}.$$

Zamenjujući y'_{p_1} i y''_{p_1} u posmatranu jednačinu imamo da je $A = \frac{1}{4}$, pa je

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}e^{2x}.$$

Neka je sada

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

Kompleksan broj $a + bi = 2i$ nije nula karakterističnog polinoma $q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8$, pa partikularno rešenje y_{p_2} tražimo u obliku

$$y_{p_2} = B\sin 2x + C\cos 2x.$$

Kada y_{p_2}, y'_{p_2} i y''_{p_2} zamenimo u ovu jednačinu dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} -2B + C &= 0 \\ 4B + 8C &= 1, \end{aligned}$$

čija su rešenja $B = \frac{1}{20}$ i $C = \frac{1}{10}$. Odavde je

$$y_{p_2} = \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

Kako se partikularno rešenje početne nehomogene diferencijalne jednačine može predstaviti kao zbir

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

to je njeno opšte rešenje funcija

$$y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\sin 2x + \left(\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x.\right)$$