SNIŽAVANJE REDA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

U nekim slučajevima, red diferencijalne jednačine višeg reda može se sniziti.

Teorema

(a) *Nakon n uzastopnih integracija dobićemo opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y^{(n)} = f(x).$$

Example

Naći ono rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2},$$

koje zadovoljva sledeće uslove:

$$y(1) = 0, \;\; y'(1) = 1, \;\; y''(1) = 2.$$

Rešenje. Datu jednačinu integralimo tri puta.

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1.$$

$$\begin{aligned} y' &= \int \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1 \right) dx = -\int \frac{\ln x}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + C_1 \int dx \\ &= \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} \\ &= -\int t\,dt - \ln x + C_1 x = -\frac{t^2}{2} - \ln x + C_1 x + C_2 \\ &= -\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \int \Big(-\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2 \Big) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \ln^2 x\, dx - \int \ln x\, dx + C_1 \int x\, dx + C_2 \int\, dx \\
&= \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & dv = dx \\ du = \frac{2\ln x}{x} dx & v = x \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\Big(x \ln^2 x - 2\int \ln x\, dx \Big) - \int \ln x\, dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
$$

Kako je $y(1) = 0$, to je $0 = \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3$, odnosno

$$
C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0.
$$

Iz drugog uslova $y'(1) = 1$, a na osnovu toga što je $y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2$, važi da je

$$
C_1 + C_2 = 1.
$$

Kako je $y'' = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1$ i, po uslovu zadatka, $y''(1) = 2$, sledi da je

$$
C_1 = 3.
$$

Zamenjujući ovu vrednost u prethodne dve jednačine dobijamo

$$
C_2 = -2 \quad \text{i} \quad C_3 = \frac{1}{2}.
$$

Traženo Košijevo rešenje je

$$
y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}.
$$

(b) Za jednačinu

$$
F\Big(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\Big) = 0, \qquad 0 < k < n,
$$

uvodimo smenu

$$
z = y^{(k)},
$$

pri kojoj je

$$
z' = y^{(k+1)}, \quad z'' = y^{(k+2)}, \quad \dots \quad , z^{(n-k)} = y^{(n)},
$$

pa se rešavanje date jednačine svodi na rešavanje jednačine

$$
F\Big(x, z', z'', \dots, z^{(n-k)}\Big) = 0.
$$

Example

Rešiti jednačinu:

$$xy'' + y' - x^2 = 0.$$

Rešenje. Uvodimo smenu $y' = z$, odakle je $y'' = z'$. Imamo da je

$$xz' + z - x^2 = 0.$$

Za $x \neq 0$ dobijamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu oblika

$$z' + \frac{1}{x}z = x,$$

čije je rešenje dato sa

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left(C_1 + \int xe^{\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx\right),$$

odakle je $z = \frac{1}{x}(C_1 + \frac{x^3}{3})$, odnosno $y' = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}$.
Tada je

$$y = \int\left(\frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}\right)dx = C_1 \ln x + \frac{x^3}{9} + C_2.$$

(c) Diferencijalna jednačina

$$F\left(y, y', \ldots, {}^{(n)}\right) = 0$$

(koja ne sadrži x) dopušta snižavanje reda za jedan. Za ovo je dovoljno uvestu smenu

$$z = y'$$

i smatrati da je y nezavisno promenljiva. Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \quad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z, \ldots,$$

pa se početna jednačina transformiše u jednačinu

$$G\left(y, z, z'_y, , \ldots, z_y^{(n-1)}\right) = 0.$$

Example

Rešiti jednačinu:

$$yy'' = 2y'^2.$$

Rešenje. Nakon uvođenja smene $y' = z$, odakle je $y'' = z \cdot z'_y$, početna jednačina je oblika

$$y \cdot z \cdot z'_y = 2z^2.$$

Ukoliko je $z = 0$, odnosno $y' = 0$, dobijamo trivijalno rešenje $y = C_1$. Pretpostavimo zato da je $z \neq 0$. Nakon deljenja jednačine sa z imamo da je

$$\frac{z'_y}{z} = \frac{2}{y},$$

odnosno, dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{y}\,dy.$$

Integraleći levu i desnu stranu jednakosti dobijamo $\ln Cz = 2\ln y$, odakle je $z = C_1y^2$.

Vratimo smenu: $y' = C_1y^2$, odnosno $\frac{dy}{y^2} = C_1\,dx$. Nakon integracije dobijamo i

traženo rešenje jednačine

$$y = -\frac{1}{C_1x + C_2}.$$

(d) Razmotrimo diferencijalnu jednačinu oblika

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

čija je leva strana totalni diferencijal (po x) neke funkcije $G\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$. Pod ovom pretpostavkom, datu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$\frac{d}{dx}G\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

odakle je

$$G\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = C, \qquad \text{gde je } C \text{ konstanta.}$$

U tom slučaju finkcija F zadovoljava uslov

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Example

Rešiti jednačinu:

$$yy'' + y'^2 = 1.$$

Rešenje. Datu jednačinu napišimo u obliku

$$d(yy') = d(x).$$

Sledi da je $yy' = x + C_1$, a odavde dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$y\,dy = (x + C_1)\,dx.$$

Nakon integracije leve i desne strane jednačine imamo da je $y^2 = x^2 + 2C_1x + 2C_2$, tj. $y^2 = x^2 + \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2$.

(e) Neka je leva strana jednačine

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

homogena funkcija stepena m po promenljivim $y, y', \dots, y^{(n)}$, tj., neka važi

$$F\left(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}\right) = \lambda^m F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right).$$

Tada se red ove diferencijalne jednačine može sniziti za jedan. Dovoljno je uvesti smenu

$$\frac{y'}{y} = z, \quad \text{tj.,} \quad y' = yz.$$

Example

Rešiti jednačinu:

$$xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Rešenje. Neka je $F(x, y, y', y'') = xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$. Kako je, za $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= x(\lambda y)(\lambda y'') - x(\lambda y')^2 - (\lambda y)(\lambda y') \\ &= \lambda^2(xyy'' - xy'^2 - yy') \\ &= \lambda^2 F(x, y, y', y''), \end{aligned}$$

to je funkcija F homogena, stepena homogenosti 2, po promenljivim y, y', y''. Uvedimo smenu $y' = yz$. Odatle je $y'' = y(z^2 + z')$, pa se zamenom y' i y'' u polaznu jednačinu dobija

$$xy^2(z^2 + z') - x(yz)^2 = y^2z.$$

Dobijenu jednačinu možemo podeliti sa $y^2 \neq 0$, i tada dobijamo jednačinu

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$