1 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Definicija

Diferencijalna jednačina – bilo koja jednačina koja vezuje argument x u nekom konačnom ili beskonačnom intervalu $D = (a, b)$, nepoznatu funkciju $y = y(x)$ i njene izvode do izvesnog reda n zaključno.

Definicija

Opšti implicitni oblik: $\quad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$
gde je $x \in D$ i F je funkcija od $n + 2$ nezavisno promenljive i neprekidna je u odgovarajućem domenu.

Definicija

Opšti eksplicitni oblik: $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$
gde je $x \in D$ i f je funkcija od $n + 1$ nezavisno promenljive i neprekidna je u odgovarajućem domenu.

Značaj u nauci i tehnici:

Čitav niz zakonitosti u fizici, hemiji, mahanici, biologiji i drugim naukama izražava se preko diferencijalnih jednačina.

Definicija

Funkcija $y = u(x)$, ($x \in D$) je rešenje ili integral ove diferencijalne jednačine ukoliko je ispunjeno

$$F(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in D,$$

ili (respektivno)

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}), \quad x \in D.$$

Example

Funkcija $y = \sin x$ je rešenje jednačine $y'^2 + y^2 = 1$.

Takođe i funkcija $y = \cos x$ je rešenje ove jednačine.

Definicija

Integralna kriva – svako rešenje $y = u(x)$ posmatrane diferencijalne jednačine predstavlja krivu liniju u protoru $\mathbb{R}^{n+1}$: $\quad (x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)})$

Definicija

Opšte rešenje
$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ *(zavisi od n proizvoljnih realnih konstanti)*

Partikularno rešenje – dobija se iz opšteg rešenja kada konstante uzmu određene fiksirane vrednosti.

Example

Opšte rešenje jednačine $y'^2 + y^2 = 1$ je $y = \sin(x + C)$.

Na primer, za $C = 0$ dobija se partikularno rešenje $y = \sin x$, dok za $C = \frac{\pi}{2}$ dobija se partikularno rešenje $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Međutim, posmatrana jednačina $y'^2 + y^2 = 1$ ima i rešenja $y = 1$ i $y = -1$ koja nisu sadržana u opštem rešenju (ne mogu se dobiti iz opšteg rešenja pogodnim odabirom konstante C).

Definicija

Rešenja diferencijalne jednačine koja nisu sadržana u opštem rešenju nazivaju se singularna rešenja.

Example

(A) $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$;

(B) $y'' + y' + y = \sin x + e^{-x}$;

(C) $y''' = 2y''y'$.

Definicija

Za diferencijalnu jednačinu kažemo da je k-tog reda ako je k red najvišeg izvoda koji figuriše u jednačini.

Definicija

Diferencijalna jednačina prvog reda

Opšti implicitni oblik

$$F(x, y, y') = 0$$

Opšti eksplicitni oblik

$$y' = f(x, y)$$

1 1 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I REDA

1 1 1 JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

Definicija

Jednačina koja razdvaja promenljive je svaka jednačina oblika

$$y' = f(x)g(y),$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

pri čemu je:

- $f(x)$ *funkcija od* x *neprekidna na intervalu* $a < x < b$;
- $g(y)$ *funkcija od* y *neprekidna na intervalu* $c < y < d$;
- $g(y) \neq 0$, *za svako* $y \in (c, d)$.

Ako ovu funkciju napišemo u obliku

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

onda integracijom dobijamo

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

odnosno

$$F(y) = G(x) + C,$$

odakle rešavanjem po y (ako je to moguće učiniti) dobijamo traženu funkciju

$$y = y(x), \quad x \in (a, b).$$

1 1 2 HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Funkcija $f(x,y)$ je homogena funkcija n-tog stepena ako za proizvoljno t važi

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Example

(A) Funkcija $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 - xy$ je homogena funkcija drugog stepena homogenosti, jer je

$$f(tx,ty) = t^2(3x^2 + 5y^2 - xy) = t^2 f(x,y);$$

(B) Funkcija $f(x,y) = \frac{2x^2+2y^2}{2x^2-y^2}$ je homogena funkcija nultog stepena, jer je

$$f(tx,ty) = \frac{t^2(2x^2+2y^2)}{t^2(2x^2-y^2)} = \frac{2x^2+2y^2}{2x^2-y^2} = f(x,y).$$

Definicija

Diferencijalna jednačina $y' = f(x,y)$ naziva se homogena diferencijalna jednačina ako je $f(x,y)$ homogena funkcija nultog stepena.

Homogena jednačina se uvek može predstaviti u obliku

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Stavljajući da je

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{odnosno} \quad y = xu,$$

dobićemo da je $y' = u + xu'$, pa data jednačina postaje

$$u + xu' = g(u), \quad \text{odnosno} \quad \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x},$$

a to je jednačina koja razdvaja promenljive.

1 1 3 JEDNAČINE KOJE SE SVODE NA HOMOGENE

Definicija

Jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 *i* c_2 *konstante, može se pogodnom smenom svesti na homogenu diferencijalnu jednačinu.*

Pretpostavićemo da je c_1 ili c_2 različito od nule, jer u suprotnom se data jednačina svodi na običnu homogenu jednačinu.

Razlikujemo dva slučaja

$$\text{(A)}\quad a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2 \qquad\qquad \text{(B)}\quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

(A) U slučaju da je $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$, u jednačini

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

uvešćemo smenu

$$X = x + \alpha, \qquad Y = y + \beta,$$

gde je Y funkcija argumenta X, a α i β su konstante.
Tada je

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right)$$

Kostante α i β se određuju iz uslova

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Tada se početna jednačina svodi na homogenu diferencijalnu jednačinu oblika

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right).$$

(B) U slučaju da je $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = 1 : \lambda$, odnosno ako je $a_2 = \lambda a_1$ i $b_2 = \lambda b_1$, onda se jednačina

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

svodi na jednačinu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right),$$

koja se dalje smenom

$$a_1x + b_1y = t, \qquad y' = \frac{1}{b_1}t' - \frac{a_1}{b_1}$$

svodi na jednačinu

$$\frac{1}{b_1}t' - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{t + c_1}{\lambda t + c_2}\right)$$

kod koje se promenljive mogu razdvojiti.

1 1 4 LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Linearna diferencijalna jednačina je bilo koja jednačina oblika

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (x \in D),$$

pri čemu su funkcije $P(x)$ *i* $Q(x)$ *neprekidne u intervalu* D.

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine dato je formulom

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

1 1 5 BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Bernulijeva diferencijalna jednačina je bilo koja jednačina oblika

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad (x \in D),$$

pri čemu su funkcije $P(x)$ i $Q(x)$ neprekidne u intervalu D, i $\alpha \neq 0, 1$.

Nakon deljenja sa y^{α}, ova jednačina se svodi na

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x),$$

gde uvođenjem smene $\frac{1}{y^{\alpha-1}} = z$, pri kojoj je $\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}$,

dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x),$$

odnosno

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

1 1 6 RIKATIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' + A(x)y^2 + B(x)y + C(x) = 0,$$

pri čemu su $A(x), B(x)$ i $C(x)$ neprekidne funkcije na intervalu (a, b), naziva se Rikatijeva diferencijalna jednačina.

– U opštem slučaju, ne može se rešiti integracijom.

– Ako je poznato jedno njeno partikularno rešenje $y_0(x)$, onda uvođenjem smene

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)},$$

Rikatijeva diferencijalna jednačina se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu.

1 1 7 JEDNAČINA SA TOTALNIM DIFERENCIJALOM

Definicija

Neka su $P(x,y)$ *i* $Q(x,y)$ *neprekidne funkcije na pravougaoniku* $a < x < b, c < y < d$. *Ako leva strana diferencijalne jednačine*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

predstavlja totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$, *tj. ako važi*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y) = u'_x dx + u'_y dy,$$

onda se ova jednačina naziva jednačina sa totalnim diferencijalom.

– Opšte rešenje ove jednačine dato je sa $u(x,y) = C$, (C – konstanta).

– Potreban i dovoljan uslov da ovo bude jednačina sa totalnim diferencijalom je

$$P'_y = Q'_x.$$

– Funkcija $u(x,y)$ data je sa

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \right) dy + C_1$$

1 1 8 LANGRANŽOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Diferencijalna jednačina oblika

$$y = xf(y') + g(y'),$$

gde su f *i* g *neprekidne funkcije, naziva se Lagranžova diferencijalna jednačina.*

Uvedimo parametar $p = \frac{dy}{dx} = y'$. Tada je

$$\begin{aligned}
y &= xf(p) + g(p) \\
dy &= d(xf(p) + g(p)) \\
y'dx &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\
pdx &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\
(f(p) - p)dx &+ [xf'(p) + g'(p)]dp = 0
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo jednačinu

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p)-p}x + \frac{g'(p)}{f(p)-p} = 0$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina po funkciji $x = x(p)$. Nakon rešavanja ove jednačine dolzimo do funkcije $y = y(x)$ u parametarskom obliku

$$y = xf(p) + g(p), \quad x = x(p).$$

Ako eventualno možemo da eliminišemo parametar p, onda rešenje dobijamo u eksplicitnom obliku $y = y(x)$.

1 1 9 KLEROOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Definicija

Diferencijalna jednačina oblika

$$y = xy' + f(y'),$$

naziva se Kleroova diferencijalna jednačina.

Ako stavimo $y' = p$ ova jednačina postaje

$$y = xp + f(p),$$

odakle je

$$dy = y'dx = pdx$$

$$d(xp + f(p)) = pdx$$

$$pdx + xdp + f'(p)dp = pdx$$

$$(x + f'(p))dp = 0$$

— Ako je $dp = 0$, onda je $p = C$, pa je $y = xy' + f(y') = xC + f(C)$.

— Ako je $x + f'(p) = 0$, onda je $x = -f'(p)$, $\quad y = xp + f(p)$, odakle izbacivanjem parametra p dobjamo takozvano singularno rešenje ove diferencijalne jednačine.