1 Комплексни бројеви

Комплексни бројеви су бројеви облика $z = x + iy$, где су $x, y \in \mathbb{R}$, а i је *имагинарна јединица* за коју важи

$$i^2 = -1.$$

Скуп комплексних бројева означен је са $\mathbb{C}$.

Ако је $z = x + iy$, тада се бројеви x и y називају редом *реалним* и *имагинарним* делом комплексног броја z, у ознакама

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Im} z.$$

На основу дефиниције имагинарне јединице, за $k \in \mathbb{Z}$ важи

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

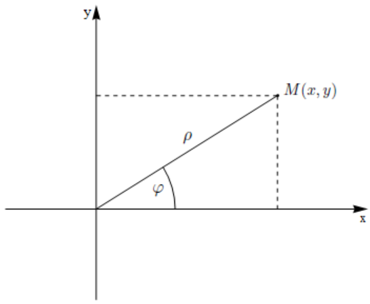
Нека су $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ комплексни бројеви. Тада важи:

- $z_1 = z_2$ ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;
- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (z_2 \neq 0)$.

Комплексна раван је координатна раван у којој је сваки комплексан број $z = x + iy$ представљен тачком $M(x, y)$ (Слика **??**). Оса Ox је реална, а оса Oy је имагинарна оса. Растојање од координатног поцхетка до тачке $M(x, y)$ називамо *модул комплексног броја* $z = x + iy$ и рачунамо га по формули

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Угао између позитивног дела x-осе и правца ненула вектора $\overrightarrow{OM}$ назива се *аргумент комплексног броја* $z = x + iy$ и означаваћемо га са φ.



Слика 1: Представљање комплексног броја у комплексној равни.

Број $\overline{z} = x - iy$ назива се *конјуговано-комплексни* број броја $z = x + iy$ и важи

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Приметимо да су комплексни бројеви z и $\overline{z}$ симетри;ни у односу на реалну осу.

Коњуговање комплексних бројеваима следећа својства:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

За произвољне комплексне бројеве z и w важи:

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{и} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$;
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$;
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$;
- $|\overline{z}| = |z|$;
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Да бисмо одредили аргумент комплексног броја $z = x + iy$, најпре, ћемо дефинисати угао $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, тако да је

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right|.$$

Тада угао $\varphi \in (-\pi, \pi]$ одређујемо на следећи начин:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & \text{за } x > 0, y > 0 \quad \text{(I квадрант);} \\ \pi - \varphi_0, & \text{за } x < 0, y > 0 \quad \text{(II квадрант);} \\ -\pi + \varphi_0, & \text{за } x < 0, y < 0 \quad \text{(III квадрант);} \\ -\varphi_0, & \text{за } x > 0, y < 0 \quad \text{(IV квадрант).} \end{cases}$$

Специјално је:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{за } x = 0 \text{ и } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{за } x = 0 \text{ и } y < 0; \\ 0, & \text{за } x > 0 \text{ и } y = 0; \\ \pi, & \text{за } x < 0 \text{ и } y = 0. \end{cases}$$

За $z = 0$ нема смисла дефинисати аргумент од z.

Два најчешћа начина представљања комплексних бројева у комплексној равни су

- *алгебарски облик* $z = x + iy$;
- *тригонометријски облик* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

У применама се често користи *Ојлерова формула*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

одакле добијамо и

- *експоненцијални облик* комплексног броја

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Експоненцијални облик комплексног броја је погодан за степеновање и кореновање комплексног броја. Стога, приликом степеновања или кореновања комплексног броја, ако је он дат у алгебарском облику, најчешће се преводи у експоненцијални облик.

За комплексан број $z = \rho e^{i\varphi}$ формула за n-ти степен је

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}, \tag{1}$$

а формула за n-ти корен је

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \tag{2}$$