Algebarski izrazi

Polinomi–rastavljanje na činioce

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{1}$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{2}$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{3}$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{4}$$
$$a^n \pm b^n = (a-b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b + \cdots \mp ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

gde se u slučaju zbira pretpostavlja da je n neparan prirodan broj.

Specijalno je

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1), \qquad n \in N \tag{6}$$
$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \pm \cdots + (-1)^n b^n. \tag{7}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, gde su x_1 i x_2 nule datog polinoma. Uopšte, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (a_0 \neq 0) \tag{8}$$

tada je

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{9}$$

Ako je $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, tada je $Q(x)$ količnik, a $R(x)$ ostatak deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $D(x)$.

Bezuov stav: Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $(x-a)$ je $R = P(a)$. Specijalno, ako je $P(a) = 0$, tada je $P(x)$ deljivo sa $(x-a)$ i $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Hornerova šema: Neka je $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, gde je $a_0 \neq 0$, dati polinom koji pri deljenju polinomom $(x-a)$ daje količnik $Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ i ostatak R, tj. neka je

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x-a) + R.$$

Za određivanje koeficijenata $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ koristimo sledeću šemu:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 = a_0 & b_1 = a_1 + b_0 & \cdots & b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot a & R = a_n + b_{n-1} \cdot a \end{array}$$

Brojevni, racionalni i iracionalni algebarski izrazi

Skraćivanje razlomaka:

$$\frac{A(x)D(x)}{B(x)D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}, \qquad \text{gde je } D(x) \neq 0.$$

Množenje i deljenje razlomaka:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \qquad \text{i} \qquad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Dvojni razlomci:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Osobine stepena: Za proizvoljne x, y i za pozitivne vrednosti a i b važe jednakosti:

- $a^0 = 1$;
- $a^x a^y = a^{x+y}$;
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $(ab)^x = a^x a^y$;
- $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Svojstva aritmetičkih vrednosti korena: Za bilo koje vrednosti prirodnih brojeva k, n i za ma koje vrednosti nenegativnih brojeva a i b važe jednakosti:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b \neq 0)$;
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;
- $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$;
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$;
- $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- $a < b \Longrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Za proizvoljne realne vrednosti broja a važi: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{kada je } a \geq 0 \\ -a, & \text{kada je } a < 0 \end{cases}$
odnosno, opštije: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Racionalisanje imenioca: Neka su a i b pozitivni brojevi takvi da je $b \neq a \neq b^2$ i n i k proizvoljni prirodni brojevi

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}$$

$$\frac{1}{b \pm \sqrt{a}} = \frac{1}{b \pm \sqrt{a}} \cdot \frac{b \mp \sqrt{a}}{b \mp \sqrt{a}} = \frac{b \mp \sqrt{a}}{b^2 - a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}$$

Lagranžovi identiteti:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$